1. Considere a função f dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$$

   (a) Qual o domínio de f?
   (b) Mostre que f é contínua.
   (c) Justifique a igualdade:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^4}.$$

   (d) Prove que para todo x no domínio de f,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$$

   Justifique todas as suas afirmações.

2. Determine o raio de convergência da série. Para quais valores de x a série converge a) absolutamente, b) condicionalmente.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências ímpares de x são nulos. Para contornar essa dificuldade faça $y = x^2$ e analise a série resultante)

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências pares de x são nulos.)

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}(x-3)^n$

3. Determine as expansões em séries de potências das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas.

   (a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

   (b) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$

4. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$$

5. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n-1}$

6. Mostre que $\ln x = \ln 2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}(x-2)^n,\ 0 < x < 4.$

7. Use séries de potências para aproximar a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ com precisão de quatro casas decimais.

8. Dado um número inteiro positivo k, considere a k-ésima função de Bessel de primeira espécie, definida por

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} \qquad \text{(série de Bessel)}$$

Determine o raio de convergência da série de Bessel.

9. Mostre que a função de Bessel J_0 é solução da edo:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$