2ª Lista de Exercícios - SME0812 Modelos Lineares - 17/08/2012

Exercício 1. Calcule o determinante e a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{bmatrix},$$

onde a, b, c e d são escalares e I é a matriz identidade de ordem m.

Exercício 2. Prove que se B é uma inversa generalizada de A, então BAB também é uma inversa generalizada de A.

Exercício 3. Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ tal que $A^2 = mA$. Mostre que $B = \frac{1}{m}A$ é uma inversa generalizada de $\frac{1}{m}A$.

Exercício 4. Se $ABA = kA$, $k \neq 0$ um escalar, mostre que $\frac{1}{k}B$ é uma inversa generalizada de A.

Exercício 5. Particionando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ de forma conveniente, determine sua inversa.

Exercício 6. Mostre que se B é uma inversa generalizada de A, então B' é uma inversa generalizada de A'.

Exercício 7. Se A é definida como $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$, prove que $A^- = \begin{bmatrix} B^- & 0 \\ 0 & C^- \end{bmatrix}$ é uma inversa generalizada de A, em que B^- e C^- são inversas generalizadas de B e C, respectivamente.

Exercício 8. Determine uma inversa generalizada de $A = [3\ 0]$.

Exercício 9. Considere o sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

(a) Prove que $\begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma inversa generalizada de $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Utilizando essa inversa generalizada, determine a solução geral do sistema.

Exercício 10. Prove que as raízes características de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.

Exercício 11. Seja A uma matriz $p \times n$ qualquer.

(a) Prove que $A'A$ é uma matriz simétrica de dimensão $n \times n$.

(b) Mostre que $A'A$ é não negativa definida.

Exercício 12. Considere o modelo de medidas repetidas

$$X_{i1} = \mu + \epsilon_{i1}$$
$$X_{i2} = \mu + \alpha + \epsilon_{i2}, i = 1, \ldots, n$$

onde X_{i1} e X_{i2} são medidas no i-ésimo indivíduo, antes e depois da aplicação de um tratamento, respectivamente. Admitindo que $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2})'$, $i = 1, \ldots, n$ são vetores aleatórios independentes com $\mathrm{E}(\epsilon_{ij}) = 0$ e $\mathrm{Var}(\epsilon_{ij}) = \sigma_j^2$ e $\mathrm{Cov}(\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}) = \rho\sigma_1\sigma_2$, construa a matriz de variâncias e covariâncias de $(\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_n)'$ e escreva-a utilizando a notação do produto de Kronecker.

Exercício 13. Seja A uma matriz simétrica $n \times n$. Prove que existe D, matriz diagonal, tal que $\mathbf{x}'A\mathbf{x} = \mathbf{y}'D\mathbf{y}$.

Exercício 14. Se $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ é positiva definida, prove que existe uma transformação $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}'A\mathbf{x} = \mathbf{y}'\mathbf{y}$.

Exercício 15. Mostre que se A é inversível, então A^{-1} é a única inversa generalizada de A.

Exercício 16. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ com $r(\Sigma) = n$, determine a distribuição de $\mathbf{Y}'\Sigma\mathbf{Y}$.

Exercício 17. Seja $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 I)$. Se A é uma matriz simétrica de posto completo, calcule $\mathrm{E}(\mathbf{Y}'A\mathbf{Y})$ e $\mathrm{Var}(\mathbf{Y}'A\mathbf{Y})$.

Exercício 18. Sejam $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, B uma matriz de constantes $q \times p$ e $\mathbf{b}$ um vetor de constantes $q \times 1$. Usando funções geradoras de momentos, prove que $\mathbf{Y} = B\mathbf{X} + \mathbf{b}$ tem distribuição $N_q(B\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, B\Sigma B')$.

Exercício 19. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2, determine a esperança de

$$Q = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \ldots + (X_{n-1} - X_n)^2.$$

Exercício 20. Se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, mostre que $\overline{Y}$ e $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}$ são variáveis aleatórias independentes.

Exercício 21. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(0, I_n)$ com $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)'$, determine a variância de

$$(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + \ldots + (Y_{n-1} - Y_n)^2.$$

Exercício 22. Seja $\mathbf{Y} \sim N_n(0, I_n)$. Prove que se $\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = Q_1 + Q_2$ onde $Q_1 = \mathbf{Y}'A\mathbf{Y}$ e $Q_1 \sim \chi_a^2$ então $Q_2 \sim \chi_{n-a}^2$.

Exercício 23. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ com $\mathbf{Y} = (Y_2, Y_2, Y_3)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \mu, \mu)'$ e $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de a para que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Y_1 - Y_2 - Y_3$ sejam independentes.