SME0800 PROBABILIDADE I
1ª PROVA - 2024 (ESBOÇO)

$\boxed{1.}$ Pelo enunciado, $P(A) = 1/30$, $P(B) = 1/80$ e $P(A \cap B) = 1/1000$.

(a) O evento é $A \cup B$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/30 + 1/80 - 1/1000 = \dfrac{269}{6000} \cong 0{,}044$

(b) O evento é $(A \cup B)^c$.
$P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - \dfrac{269}{6000} = \dfrac{5731}{6000} \cong 0{,}9552$.

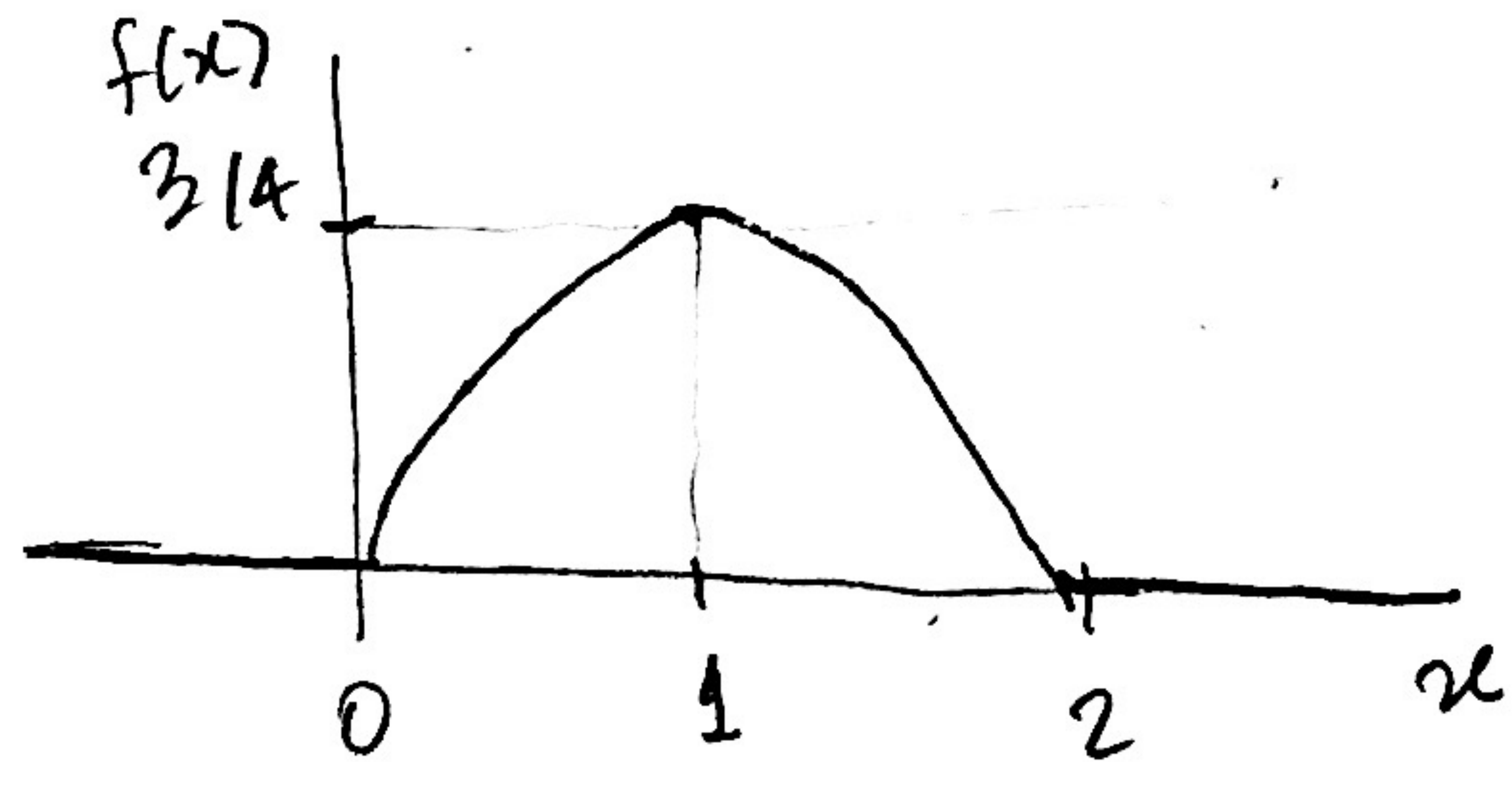
(c) O evento é $A \cap B^c$.
Como $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ (união de eventos mutuamente exclusivos). Assim, $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{30} - \dfrac{1}{1000} = \dfrac{97}{3000} \cong 0{,}0323$.

$\boxed{2.}$ O espaço amostral é formado por todas as permutações de 24 números, cujo total é $N = 24!$. Tomando um grupo de quatro números, os dois números fixados podem ocupar 4×3 posições e os números restantes têm $22!$ possíveis posições. Considerando que são seis grupos, o número total de maneiras é $M = 6 \times 4 \times 3 \times 22!$. A probabilidade é $\dfrac{M}{N} = \dfrac{6 \times 4 \times 3 \times 22!}{24!} = \dfrac{3}{23} \cong 0{,}130$.

$\boxed{3.}$ $f(x) = cx(2-x)/4$, se $0 < x < 2$; $f(x) = 0$, caso contrário.

(a) $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{c}{4}\int_0^2 x(2-x)\,dx = \frac{c}{4}\cdot\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$

$= \dfrac{c}{4} \times \left(4 - \dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{c}{3} \Rightarrow c = 3$.



(a) $0 < x < 2$: $F(x) = \int_0^x \frac{3}{4} . u(2-u)\,du = \frac{3}{4} x^2 (1 - x/3)$.

$P(X \geq 3/2) = 1 - F(3/2) = \frac{5}{32}$ e $P(1/3 \leq X < 7/6) = F(7/6) - F(1/3) = \frac{475}{864} \cong 0{,}5498$.

(b) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \frac{3}{4} \int_0^2 x^2 (2-x)\,dx$

$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 1.$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{3}{4} \int_0^2 x^3 (2-x)\,dx = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$

$= \frac{6}{5}$. Logo, $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$.

$\boxed{4.}$ O evento B_j indica que uma família tem j crianças, $j \in \{1,2,3\}$ com $P(B_1) = 6/11$, $P(B_2) = 3/11$ e $P(B_3) = 2/11$. Os três eventos formam uma partição. O evento A indica que um menino não tem irmãs. Devemos calcular $P(B_1|A)$.

Fórmula de Bayes: $P(B_1|A) = \dfrac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)}$

Supomos que as probabilidades de nascimento são iguais a $1/2$ para menina (Ma) e menino (Mo). Temos $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$; $P(A|B_2) = \frac{1}{4}$ e $P(A|B_3) = \frac{1}{8}$, que correspondem a $\{Mo\}$, $\{Mo, Mo\}$ e $\{Mo, Ma, Mo\}$, respectivamente. Logo,

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{6}{11} \times \frac{1}{2}}{\frac{6}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{11} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{11} \times \frac{1}{8}} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

$\boxed{5.}$ A função massa de probabilidade e a função geradora de momentos de X são, respectivamente,

$P(X=x) = \dfrac{e^{-a} a^x}{x!}$, $x \in \{0,1,2,\dots\}$ e $\phi_X(t) = \exp(a.(e^t - 1))$, $t \in \mathbb{R}$, em que $a = 2$. Notamos que $\phi_Y(t)$ é obtida de $\phi_X(t)$ com $a = 3/2$. Como a função geradora de momentos determina a distribuição, temos que

$P(Y=y) = \dfrac{e^{-3/2} \times (3/2)^y}{y!}$. Calculamos $P(Y=2) = \dfrac{e^{-3/2} \times (3/2)^2}{2!} \cong 0{,}251$.