ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – $2^{\underline{\text{o}}}$/2018

$5^{\underline{\text{a}}}$ lista de exercícios

1. (a) X, $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ e $(Z_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias tais que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$, $Y_n \xrightarrow{\text{P}} a$ e $Z_n \xrightarrow{\text{P}} b$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que $Y_n + Z_n X_n \xrightarrow{\text{D}} a + bX$.
   (b) Se $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ e $(c_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, em que c é um ponto de continuidade de F_X, prove que $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(c_n) = F_X(c)$.

2. $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathsf{uniforme}\big((0,\theta]\big)$, $\theta > 0$.
   (a) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de θ e discuta sua consistência[1].
   (b) Para n fixo, o estimador é não viesado?

3. (a) $(X_n)_{n\geq 1}$ são variáveis aleatórias $\overset{\text{iid}}{\sim}$ $\mathsf{normal}(\theta, 1)$. Apresente um estimador consistente para $I_{\{0\}}(\theta)$.
   (b) Desenvolva um estudo de simulação de Monte Carlo para ilustrar o resultado obtido no item anterior.

4. Considere variáveis aleatórias $X_{it} \overset{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu_i, \theta)$, $t = 1, \ldots, T$ e $i = 1, \ldots, n$.
   (a) Apresente o estimador de máxima verossimilhança de θ e discuta sua consistência quando $n \to \infty$ e T é fixado.
   (b) Se o estimador do item (a) não for consistente, apresente um estimador consistente para θ.

5. Considere o modelo estatístico

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i \quad \text{e} \quad X_i = x_i u_i,$$

   em que $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ são variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathrm{E}(\epsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\epsilon_i) = \sigma_\epsilon^2$, $u_1, \ldots, u_n$ são variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathrm{E}(u_i) = 1$, $\mathrm{Var}(u_i) = \sigma_u^2$ conhecida e ϵ_i e u_j são independentes para $i, j = 1, \ldots, n$. Os dados disponíveis são observações dos pares (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$.
   (a) Supondo que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais, discuta a consistência do estimador $\widehat{\beta} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i / \sum_{i=1}^n X_i^2$.
   (b) Se o estimador do item (a) não for consistente, apresente um estimador consistente para β.
   (c) Supondo que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $\mathrm{E}(x_i) = \mu_x$, $\mathrm{Var}(x_i) = \sigma_x^2$ e os ternos (x_i, ϵ_j, u_k) são independentes para $i, j, k = 1, \ldots, n$, refaça os itens (a) e (b) acima.

---

[1] "Estimador consistente" $\widehat{\theta}$, digamos, refere-se a uma sequência de estimadores $(\widehat{\theta}_n)_{n\geq 1}$ satisfazendo $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{P}} \theta$ ou $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \theta$, quando $n \to \infty$, para todo $\theta \in \Theta$.