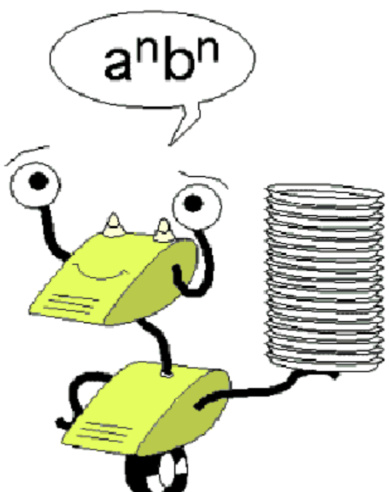
Autômatos com Pilha

Autômatos com Pilha: Definição Informal e Definição Formal

Linguagem Aceita por um ACP

ACPDet X ACPND

Notação gráfica para ACP



ACP

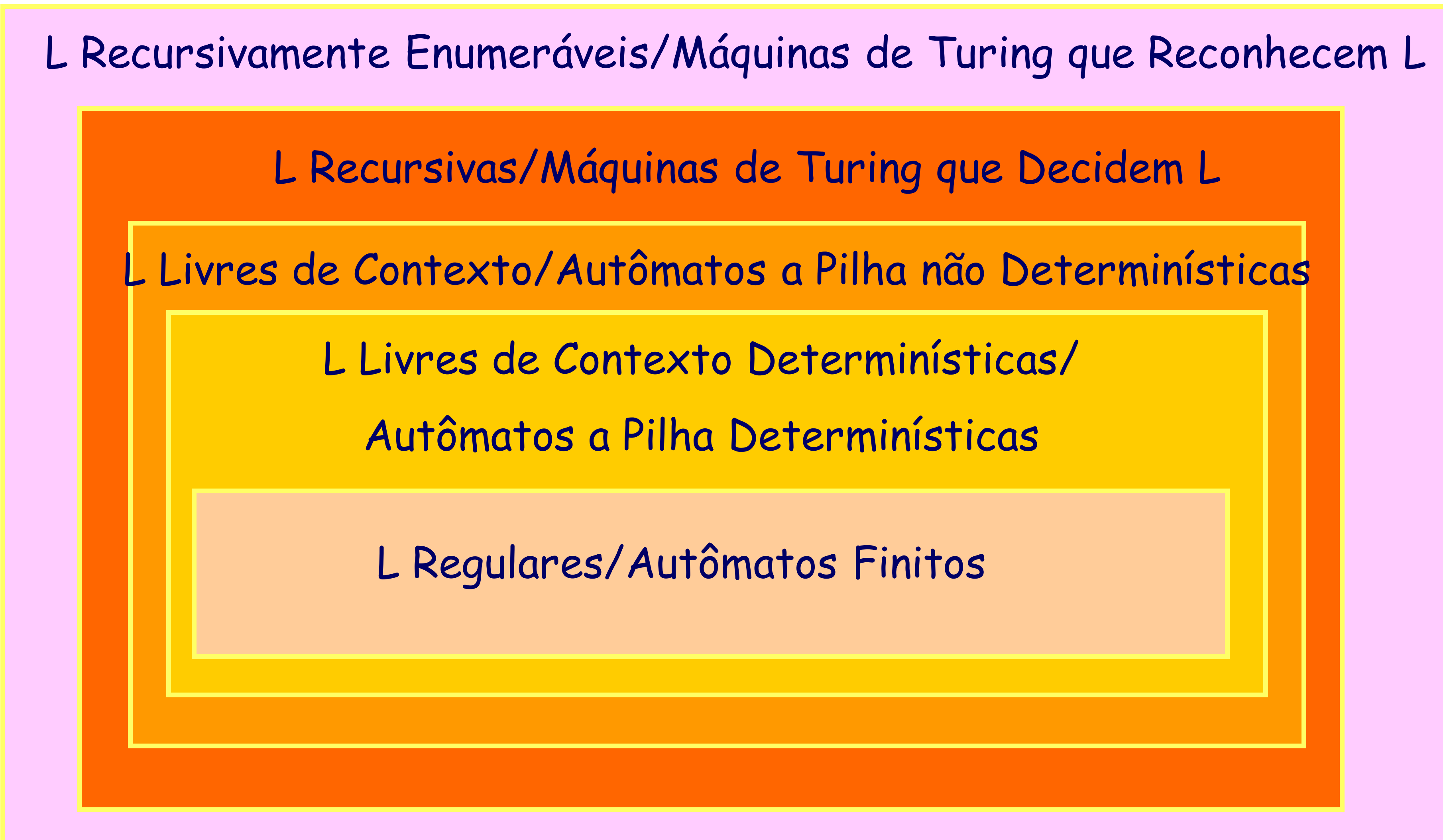
- Assim como LR tem um autômato equivalente (AF) as LLC tem também uma máquina (ACP).

- A equivalência é menos geral desde que o ACP é não determinístico.

- A versão determinística aceita somente um subconjunto das LLC. Isto é, existem, LLC que não são reconhecidas por ACPDet.
  - Exemplo clássico é $L = ww^R$ que é aceito por um ACPND mas não por um ACPDet.

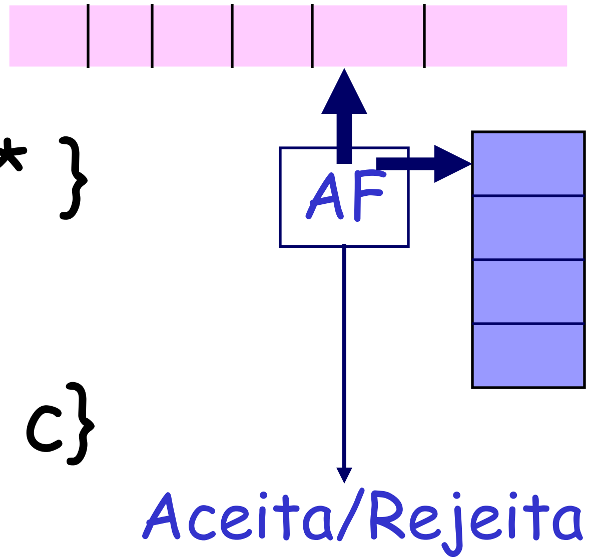
- Entretanto esse conjunto inclui a maioria das Linguagens de Programação.

Hierarquia das Classes de Máquinas e Linguagens



ACP – Definição Informal

- É um AF com uma fita de entrada e uma pilha com símbolos de um dado alfabeto.



Exemplo: $L = \{w\ c\ w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

gerada por $G = (\{S\},\{0,1,c\},P,S)$

$P = \{\ S \rightarrow 0S0 \mid S \rightarrow 1S1 \mid S \rightarrow c\}$

Exemplos de cadeias aceitas: c, 01c10, 00c00

O ACP que reconhece esta linguagem terá:

- Controle Finito com 2 estados: q1 (empilha) e q2 (desempinha)
- Pilha com pratos: vermelho, azul (0), verde (1)
- Regras:

1) Começa com prato vermelho na pilha e estado q1
2) Entrada 0, estado q1 → empilha azul
   Entrada 1, estado q1 → empilha verde
   Permanece em q1
3) Entrada c, estado q1 → não altera a pilha muda para q2
4) Entrada 0, estado q2, topo azul → desempilha
5) Entrada 1, estado q2, topo verde → desempilha
   Permanece em q2
6) Estado q2, vermelho → desempilha sem ver entrada
7) Para os outros casos não descritos, o dispositivo não faz nenhum movimento

- Este dispositivo aceita uma cadeia de entrada se: ao processar o último símbolo a pilha fica vazia.
- Exemplos:

1) w = 01c10

TopoPilha	Estado	Entrada	Pilha
Verm	q1	0	
Azul	q1	1	
Verde	q1	c	~~verde~~
Verde	q2	1	~~azul~~
Azul	q2	0	~~verm~~
Verm	q2	-	

2) w = 101c100

TopoPilha	Estado	Entrada	Pilha
Verm	q1	1	
Verde	q1	0	~~verde~~
Azul	q1	1	~~azul~~
Verde	q1	c	verde
Verde	q2	1	verm
Azul	q2	0	
Verde	q2	0 ação ???	

ACP – Definição Formal

- OACP terá uma fita de entrada, um controle finito e uma pilha que contém uma cadeia de símbolos de algum alfabeto.

- O símbolo mais à esquerda será considerado estar no TOPO.

- O dispositivo será não determinístico, pois terá algum número finito de escolhas de movimentos

2 Tipos de Movimentos

1. Um símbolo de entrada é lido

   e, dependendo (do símbolo de entrada, topo da pilha, estado) realiza 1 escolha dentre as possíveis.

   Cada escolha consiste (estado seguinte, cadeia de símbolos (pode ser vazia) para substituir o topo).

   Depois da escolha, a cabeça avança.

2. Chamado movimento-λ

   similar ao primeiro, exceto que o símbolo de entrada não é usado e a cabeça não avança depois do movimento.

   Esse tipo de movimento permite o ACP manipular a pilha sem ler símbolos de entrada.

Linguagem aceita por um ACP

1. Conjunto de todas as entradas para as quais alguma seqüência de movimentos faz com que a pilha fique vazia → Linguagem aceita por Pilha vazia

2. Similar a AF: definimos alguns estados como finais e definimos a linguagem aceita como o conjunto de todas as entradas para as quais alguma escolha de movimento faz o ACP entrar num estado final → Linguagem aceita por estados finais.

As duas formas acima são equivalentes.

Ver (Menezes, 2002) pg 112

Um ACP M é uma sétupla $(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q0, z0, F)$ onde:
(H,M,U, 2001)

1. K é um conjunto finito de estados
2. Σ (sigma) é um alfabeto finito chamado alfabeto de entrada
3. Γ (gama) é um alfabeto finito chamado alfabeto da pilha
4. $q0 \in K$ é o estado inicial. A máquina começa nele.
5. $z0 \in \Gamma$ é o símbolo inicial da pilha. Aparece inicialmente na pilha.
6. F é o conjunto de estados finais $F \subseteq K$
7. δ (delta) é um mapeamento de

$$K \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow \text{subconjuntos de } K \times \Gamma^*$$

(topo)

OBS: quando o ACP aceita por pilha vazia $F = \emptyset$

Interpretação de δ

1. $\delta(q,a,z) \rightarrow \{(p1,\gamma1), (p2,\gamma2), \ldots (pm,\gamma m)\}$

q, pi $\in$ K, a $\in \Sigma$, z $\in \Gamma^*$

ACP no estado q, com símbolo de entrada a e z no topo da pilha pode, para qualquer i, mudar para o estado pi, substituir z por γ_i (substitui por uma cadeia de símbolos da pilha) e avançar a cabeça de leitura.

2. $\delta(q,\lambda,z) \rightarrow \{(p1,\gamma1), (p2,\gamma2), \ldots (pm,\gamma m)\}$

Semelhante a anterior, só que não espera símbolo de entrada e não avança a cabeça de leitura.

OBS 1: Se $\gamma_i = \lambda$ então há desempilhamento; se γ_i = z então a pilha fica inalterada; se γ_i = yz então y é empilhado.

OBS 2: Um ACP não pode fazer um movimento se a pilha estiver vazia.

- Formalize o ACP do exemplo anterior. Deve aceitar por pilha vazia

- Controle Finito com 2 estados: q1 (empilha) e q2 (desempinha)
- Pilha com pratos: vermelho, azul (0), verde (1)
- Regras:
- Começa com prato vermelho na pilha e estado q1
- Entrada 0, estado q1 → empilha azul
- Entrada 1, estado q1 → empilha verde

Permanece em q1

- Entrada c, estado q1 → não altera a pilha muda para q2
- Entrada 0, estado q2, topo azul → desempilha
- Entrada 1, estado q2, topo verde → desempilha

Permanece em q2

- Estado q2, vermelho → desempilha sem ver entrada
- Para os outros casos não descritos, o dispositivo não faz nenhum movimento

- $M = (\{q1,q2\}, \{0,1,c\}, \{Vm,Az,Vd\}, \delta, q1, Vm, \emptyset)$

1. $\delta(q1,0,Vm) = \{(q1,AzVm)\}$
2. $\delta(q1,0,Az) = \{(q1,AzAz)\}$
3. $\delta(q1,0,Vd) = \{(q1,AzVd)\}$
4. $\delta(q1,1,Vm) = \{(q1,VdVm)\}$
5. $\delta(q1,1,Az) = \{(q1,VdAz)\}$
6. $\delta(q1,1,Vd) = \{(q1,VdVd)\}$
7. $\delta(q1,c,Vm) = \{(q2,Vm)\}$
8. $\delta(q1,c,Az) = \{(q2,Az)\}$
9. $\delta(q1,c,Vd) = \{(q2,Vd)\}$
10. $\delta(q2,0,Az) = \{(q2,\lambda)\}$
11. $\delta(q2,1,Vd) = \{(q2,\lambda)\}$
12. $\delta(q2, \lambda, Vm) = \{(q2,\lambda)\}$

Todos os conjuntos só possuem 1 elemento e
δ não é definida para $\delta(q2, 0, Vm)$ e $\delta(q2, 1, Vm)$, pois é definida para $\delta(q2, \lambda, Vm)$

ACPDet

- O ACP do exemplo é determinístico no sentido que, no máximo um movimento é possível de qualquer configuração. Podemos tirar o { e }
- Formalmente, dizemos que um ACP $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q0, z0, F)$ é determinístico se:

1. Para cada $q \in K$ e $z \in \Gamma$ se $\delta(q,\lambda,z)$ é não vazio então $\delta(q,a,z)$ é vazio para $\forall\ a \in \Sigma$

(impede a possibilidade de escolha entre um mov-λ e um envolvendo um símbolo de entrada)

2. $\delta(q,a,z)$ contém um só elemento para $\forall\ q \in K$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $z \in \Gamma$

(impede a escolha de movimento tanto para (q,a,z) como para (q,λ,z))

- Façam um ACP não-determinístico que reconhece $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ por pilha vazia

- Vejam que aqui o ACP deve aceitar a cadeia vazia.

$M = (\{q1,q2\}, \{0,1,c\}, \{Vm,Az,Vd\}, \delta, q1, Vm, \varnothing)$

1. $\delta(q1,0,Vm) = \{(q1,AzVm)\}$
2. $\delta(q1,1,Vm) = \{(q1,VdVm)\}$
3. $\delta(q1,0,Az) = \{(q1,AzAz), (q2,\lambda)\}$
4. $\delta(q1,0,Vd) = \{(q1,AzVd)\}$
5. $\delta(q1,1,Az) = \{(q1,VdAz)\}$
6. $\delta(q1,1,Vd) = \{(q1,VdVd), (q2, \lambda)\}$
7. $\delta(q2,0,Az) = \{(q2,\lambda)\}$
8. $\delta(q2,1,Vd) = \{(q2,\lambda)\}$
9. $\delta(q1, \lambda,Vm) = \{(q2,\lambda)\}$
10. $\delta(q2, \lambda,Vm) = \{(q2,\lambda)\}$

- M aceita a cadeia vazia pela regra 9
- O ACP é não determinístico pois:
  - As regras 3 e 6 possuem uma escolha de movimento.
  - Se M decide que o meio da cadeia de entrada foi alcançado então escolhe a segunda opção do conjunto e vai para o estado q2.
  - δ é definida para $\delta(q1, \lambda,Vm)$ e também para $\delta(q1,0,Vm)$ e $\delta(q1,1,Vm)$

Configuração de um ACP e Mudança de configuração

- Uma configuração de um ACP M é um par (q, γ) onde $q \in K$ e $\gamma \in \Gamma^*$
- Mudança de configuração:

Seja $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, γ e $\beta \in \Gamma^*$, $z \in \Gamma$ e $\delta(q,a,z) = (p,\beta)$ então:

$$a: (q,z\gamma) \vdash_M (p, \beta\gamma)$$

Significa que, de acordo com as regras do ACP, a entrada **a** faz com que M vá da configuração $(q,z\gamma)$ para $(p, \beta\gamma)$.

Estendendo para cadeia:

$$a_1a_2...a_n: (q1,\gamma_1) \vdash^*_M (q_{n+1}, \gamma_{n+1})$$

Por convenção: $\lambda: (q,\gamma) \vdash^*_M (q, \gamma)$

(H,M,U,2001) pg 224 define configuração como uma tripla pois embute a cadeia de entrada no par acima. Difere somente a notação!

Linguagem Aceita

- Para um ACP M, definimos L(M), a linguagem aceita por estado final como:

$$L(M) = \{w \mid w:(q0,z0) \vdash^*_M (q, \gamma) \text{ para } \forall \gamma \in \Gamma^* \text{ e } q \in F\}$$

- Para um ACP M nós definimos N(M), a linguagem aceita por pilha vazia como:

$$N(M) = \{w \mid w:(q0,z0) \vdash^*_M (q, \lambda) \text{ para } \forall q \in K\}$$

O N em N(M) significa null stack = empty stack

OBS 1: quando aceitamos por pilha vazia o conjunto de estados finais é irrelevante.

OBS 2: As duas definições são equivalentes: ver Teo 6.9 e Teo 6.11 em (H,M,U, 2001)

Exercício 1

- Encontre um ACP M que reconheça o conjunto $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^*$ e w consiste de $nro(1) = nro(0)\}$ por pilha vazia.

- Diga se o ACP é ACPDET ou ACPND
- Mostrar as configurações do ACP com a entrada 0101

Dica:

- associar 0 com Az e 1 com Vd
- "matar" 0 com 1 e 1 com 0
- fazer regra para aceitar cadeia vazia

Qual seria a GLC que reconhece esta linguagem?

$G = (\{S,A\},\{0,1\},P,S)$

$P = \{S \rightarrow \lambda \mid A$

$A \rightarrow 0A1 \mid 1A0 \mid 01 \mid 10 \mid A01 \mid A10 \}$

OU

$P = \{S \rightarrow \lambda \mid A$

$A \rightarrow 0A1 \mid 1A0 \mid 01 \mid 10 \mid 01A \mid 10A \}$

As regras 7 e 8 precisam estar lá para reconhecer, p.e., 0110 e 1001

$M = (\{q1\},\{0,1\},\{Vm,Az,Vd\}, \delta, q1,Vm, \emptyset)$

1. $\delta(q1, 0,Vm) = \{(q1,AzVm)\}$
2. $\delta(q1, 1,Vm) = \{(q1,VdVm)\}$
3. $\delta(q1, 0,Az) = \{(q1,AzAz)\}$
4. $\delta(q1, 1,Vd) = \{(q1,VdVd)\}$
5. $\delta(q1, 1,Az) = \{(q1,\lambda)\}$
6. $\delta(q1, 0,Vd) = \{(q1,\lambda)\}$
7. $\delta(q1, \lambda,Vm) = \{(q1,\lambda)\}$

ACPND pelas regras 1, 2 e 7 pois temos a chance de ler um símbolo da entrada ou usar um mov-λ.

Configurações para 0101

Entrada	Configuração
	(q1,Vm)
0	(q1,AzVm)
01	(q1,Vm)
010	(q1,AzVm)
0101	(q1,Vm)
λ	(q1, λ)

Exercício 2

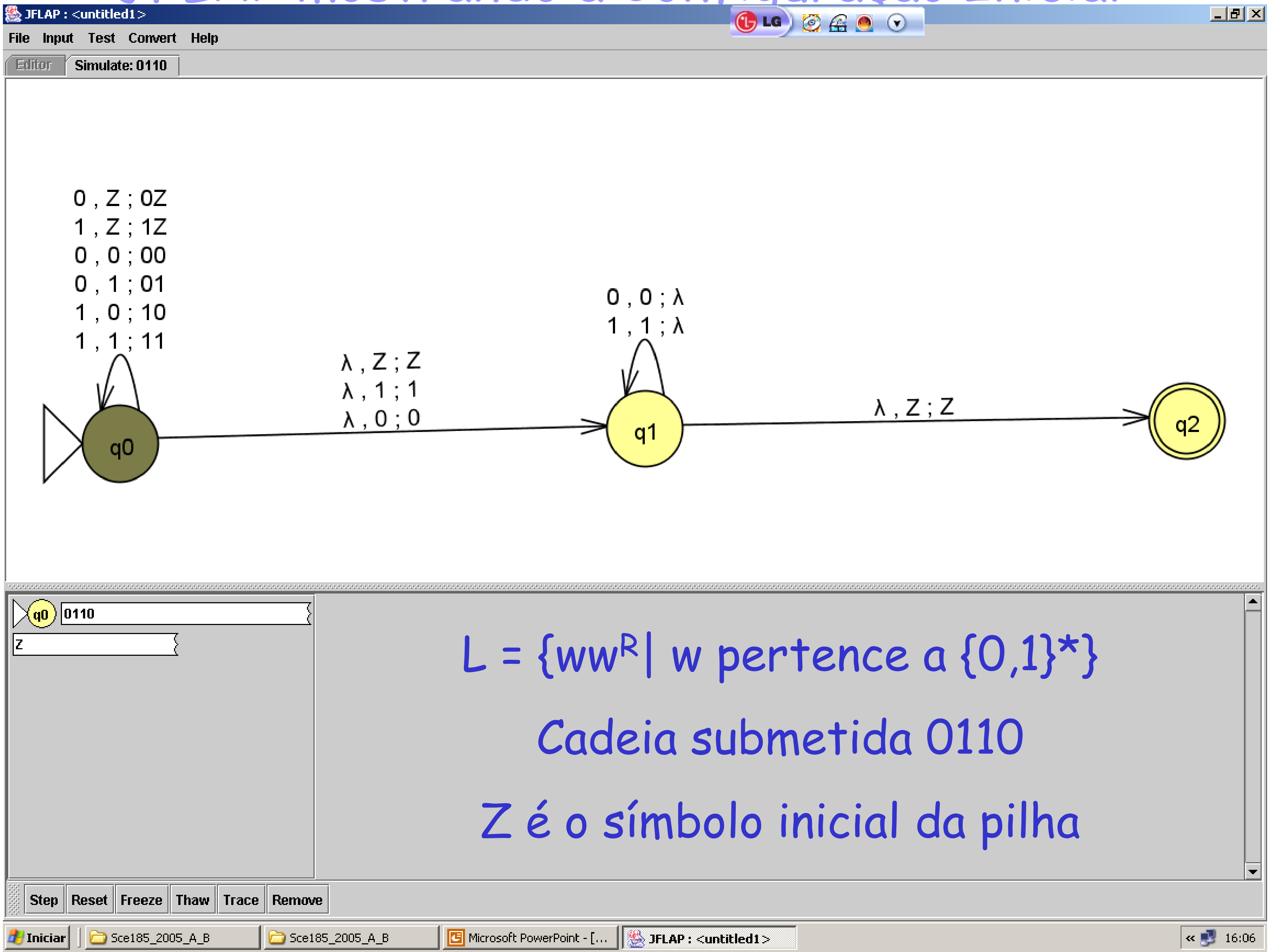
- Encontre um ACP M que reconheça o conjunto $L = \{ 0^n 1^n \mid n > 0 \}$ por pilha vazia.
- Diga se o ACP é ACPDET ou ACPND

Notação gráfica para ACP

- O diagrama de transição para ACP que aceitam a linguagem por estado final segue:
- Os nós correspondem aos estados do ACP
- Existem o estado inicial e os finais
- Um arco rotulado com a,X;α do estado q para p significa que δ(q,a,X) contém o par (p, α) entre os pares.
- Convencionalmente, Z_0 é o símbolo da pilha (no JFLAP é Z).

- Leia-se: simbolo, topo_antigo;novo_topo

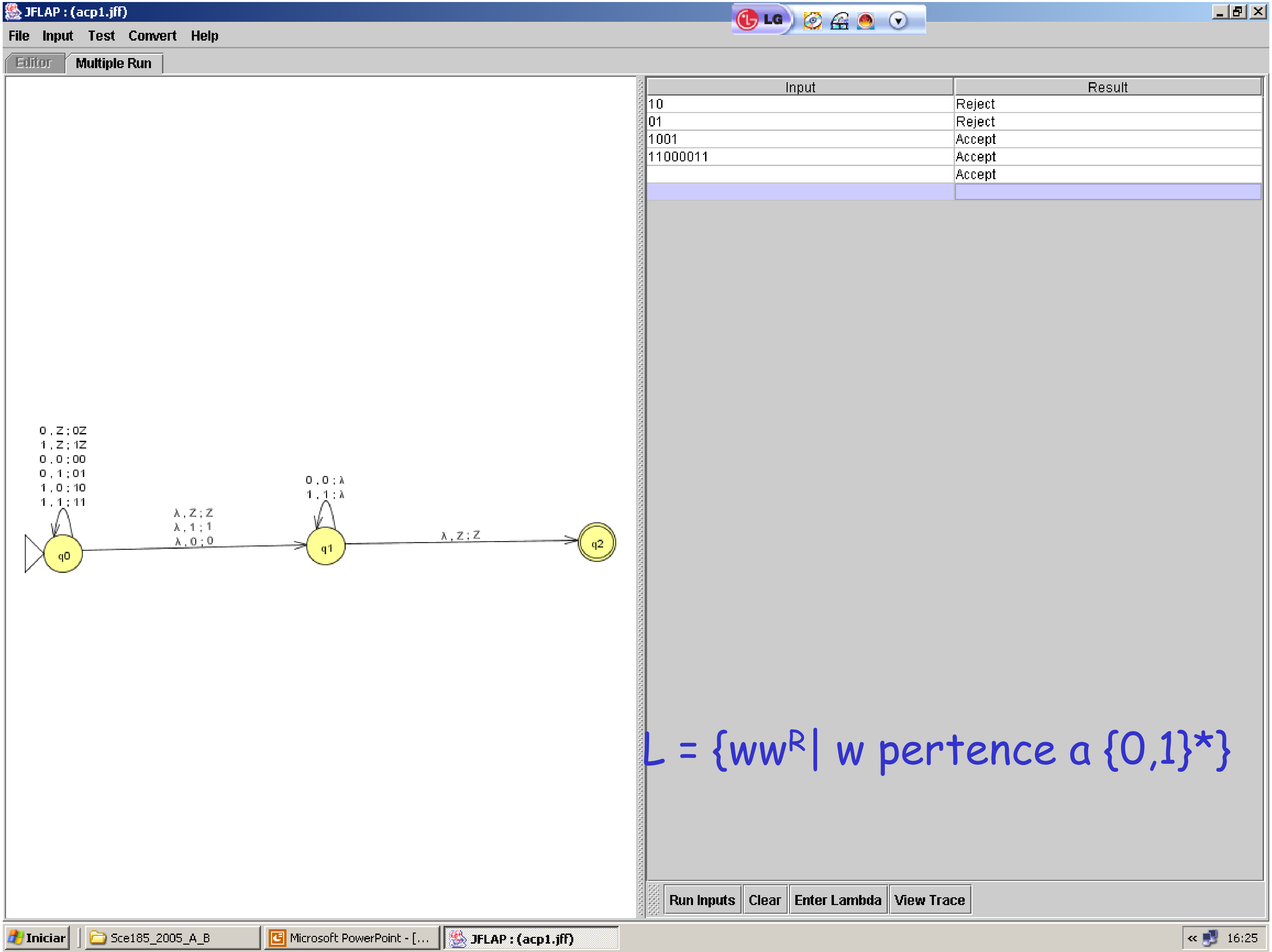
JFLAP mostrando a Configuração Inicial



L = {ww^R| w pertence a {0,1}*}

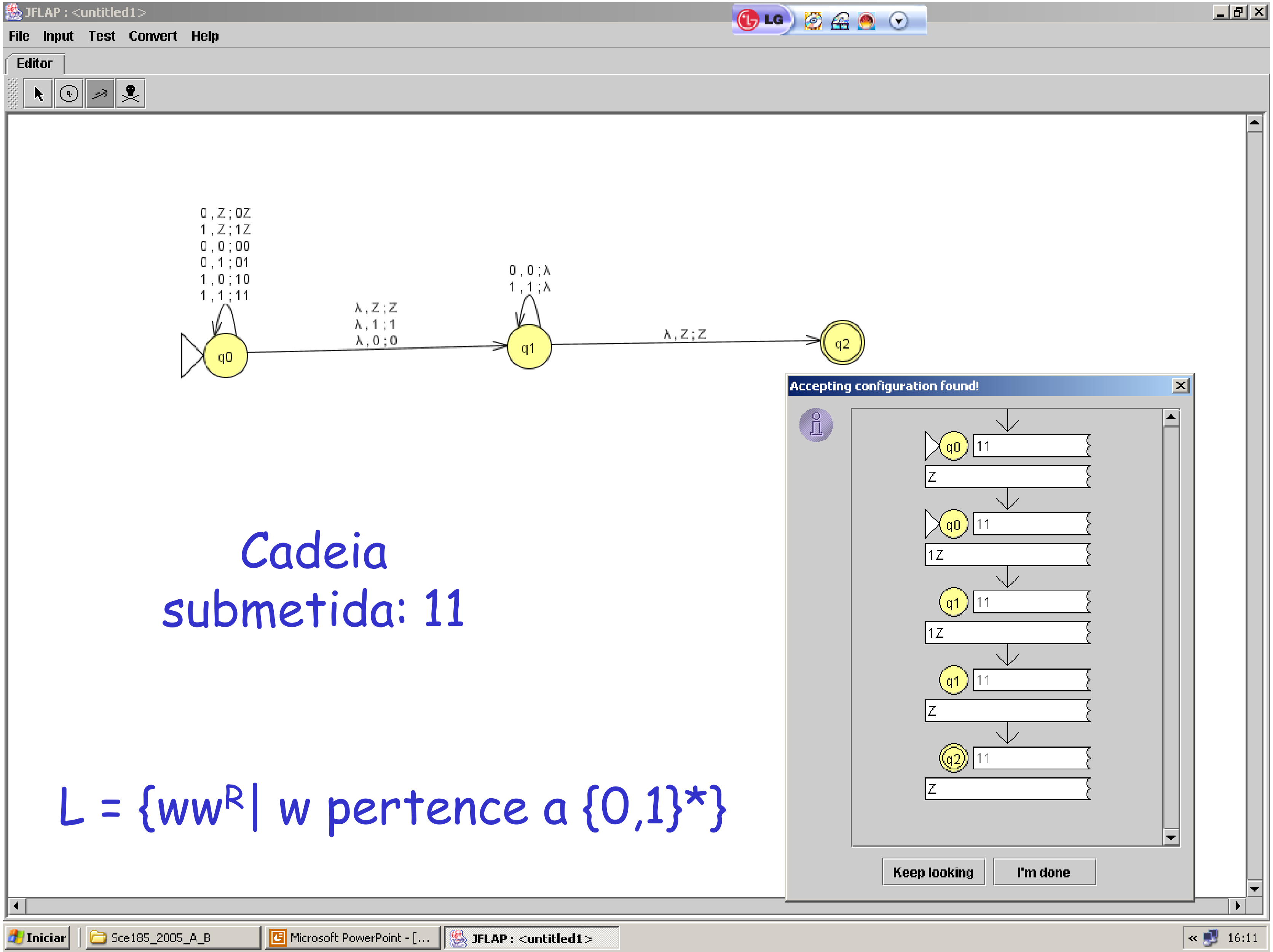
Cadeia submetida 0110

Z é o símbolo inicial da pilha



$L = \{ww^R \mid w \text{ pertence a } \{0,1\}^*\}$

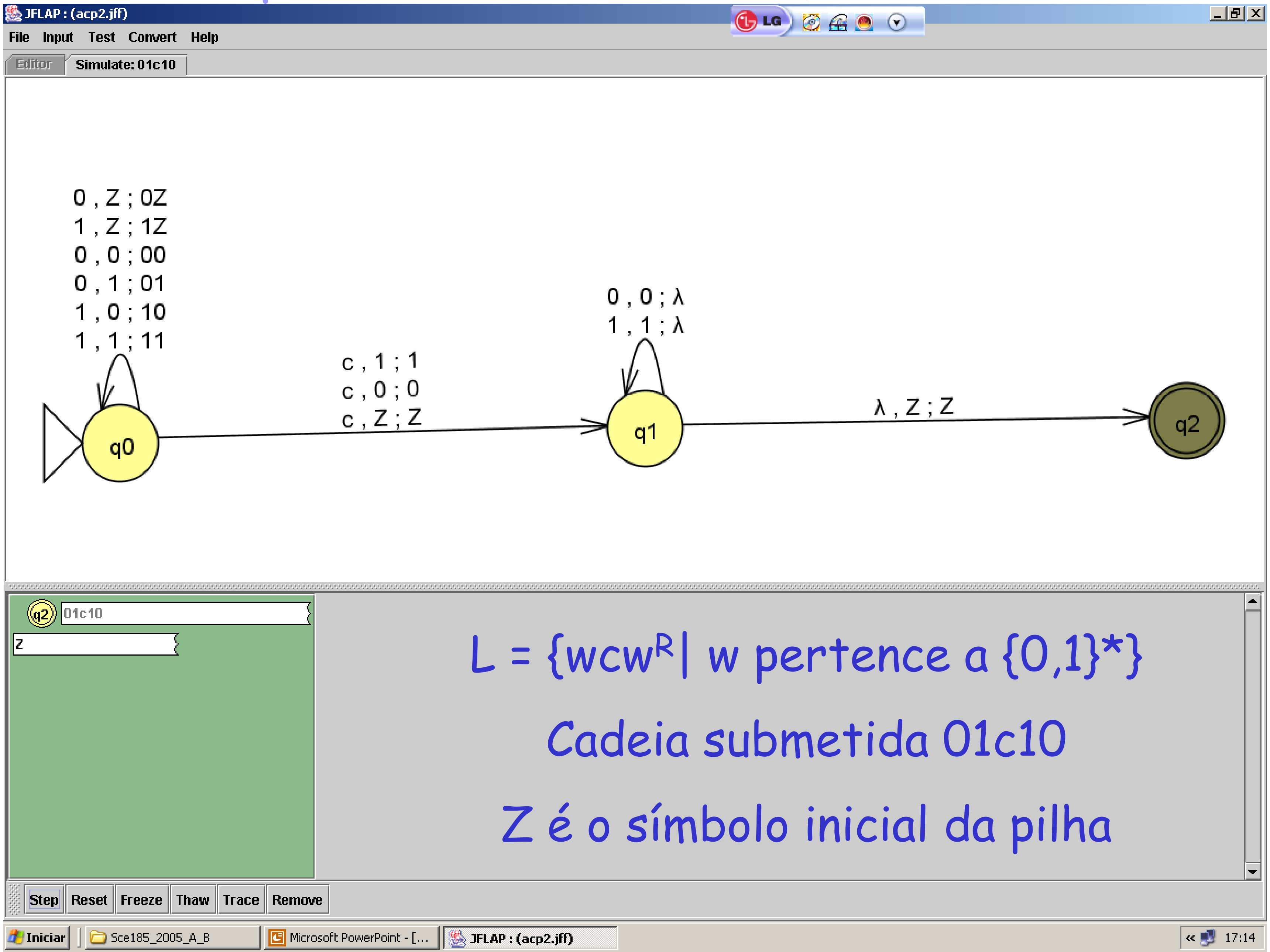
JFLAP mostrando o tracing de aceitação



Cadeia submetida: 11

$L = \{ww^R | \text{ w pertence a } \{0,1\}^*\}$

JFlap mostrando a aceitação de cadeia

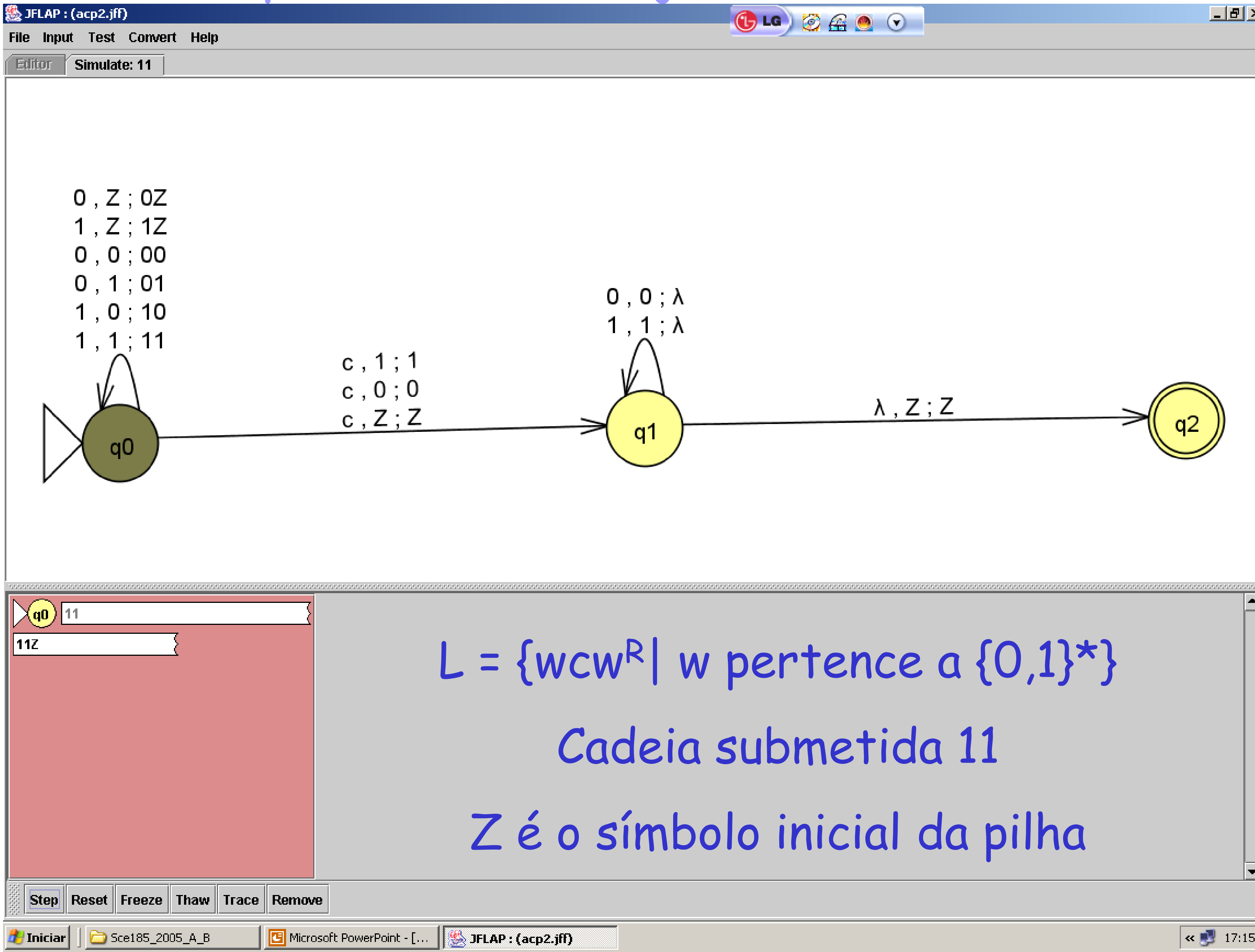


$L = \{wcw^R \mid w \text{ pertence a } \{0,1\}^*\}$

Cadeia submetida 01c10

Z é o símbolo inicial da pilha

Jflap mostrando rejeição de cadeia



$L = \{wcw^R | \text{ w pertence a } \{0,1\}^*\}$

Cadeia submetida 11

Z é o símbolo inicial da pilha