Análise de Sobrevivência e Confiabilidade

Adaptado de material do
Prof. Vicente G. Cancho (ICMC/USP)

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Universidade de São Paulo

2023

Caracterização dos tempos de sobrevivência

Seja T o tempo de vida de um indivíduo (variável aleatória contínua).
A distribuição de probabilidade de T pode ser especificada de diferentes formas:

- função densidade,

Caracterização dos tempos de sobrevivência

Seja T o tempo de vida de um indivíduo (variável aleatória contínua).
A distribuição de probabilidade de T pode ser especificada de diferentes formas:

- função densidade,
- função sobrevivência (ou confiabilidade)

Caracterização dos tempos de sobrevivência

Seja T o tempo de vida de um indivíduo (variável aleatória contínua).
A distribuição de probabilidade de T pode ser especificada de diferentes formas:

- função densidade,
- função sobrevivência (ou confiabilidade) e
- função risco.

Caracterização dos tempos de sobrevivência

Seja T o tempo de vida de um indivíduo (variável aleatória contínua).

A distribuição de probabilidade de T pode ser especificada de diferentes formas:

- função densidade,
- função sobrevivência (ou confiabilidade) e
- função risco.

A função densidade de probabilidade (fdp) é definida por

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t}, \; t \geq 0.$$

A probabilidade de um indivíduo sobreviver após o tempo t é dada pela função *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t)$$

A probabilidade de um indivíduo sobreviver após o tempo t é dada pela função *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)du = 1 - F(t), \tag{1}$$

A probabilidade de um indivíduo sobreviver após o tempo t é dada pela função *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)du = 1 - F(t), \tag{1}$$

em que $F(t)$ é a função distribuição acumulada e representa a probabilidade de ocorrer falha no máximo no tempo t, notando que $S(t) = P(T \geq t)$.

A probabilidade de um indivíduo sobreviver após o tempo t é dada pela função *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)du = 1 - F(t), \tag{1}$$

em que $F(t)$ é a função distribuição acumulada e representa a probabilidade de ocorrer falha no máximo no tempo t, notando que $S(t) = P(T \geq t)$.

Propriedades

$$\lim_{t \to 0} S(t) = 1$$

e

A probabilidade de um indivíduo sobreviver após o tempo t é dada pela função *sobrevivência*

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)du = 1 - F(t), \tag{1}$$

em que $F(t)$ é a função distribuição acumulada e representa a probabilidade de ocorrer falha no máximo no tempo t, notando que $S(t) = P(T \geq t)$.

Propriedades

$$\lim_{t \to 0} S(t) = 1$$

e

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = 0.$$

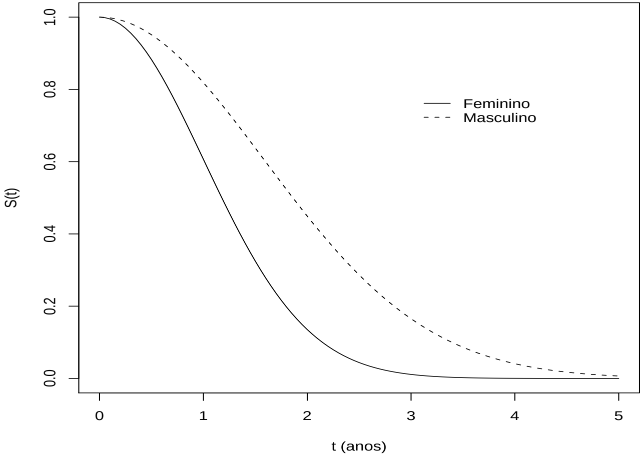


Figura 1: Função sobrevivência de pacientes por sexo

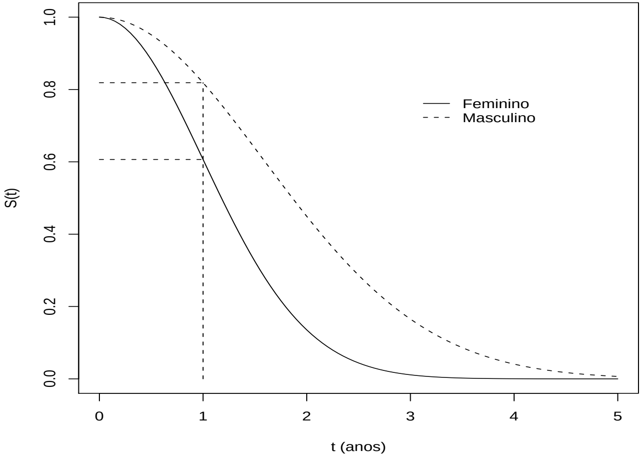


Figura 2: Função sobrevivência de pacientes por sexo

Função taxa de falha ou risco

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ pode ser expressa em termos da função de sobrevivência como

$$P(t_1 \leq T < t_2) = F(t_2) - F(t_1)$$

Função taxa de falha ou risco

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ pode ser expressa em termos da função de sobrevivência como

$$P(t_1 \leq T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = S(t_1) - S(t_2).$$

Função taxa de falha ou risco

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ pode ser expressa em termos da função de sobrevivência como

$$P(t_1 \leq T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = S(t_1) - S(t_2).$$

A probabilidade de ocorrer falha no intervalo $[t, t + \Delta t)$ é $P(t \leq T < t + \Delta t)$.

Função taxa de falha ou risco

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ pode ser expressa em termos da função de sobrevivência como

$$P(t_1 \leq T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = S(t_1) - S(t_2).$$

A probabilidade de ocorrer falha no intervalo $[t, t + \Delta t)$ é $P(t \leq T < t + \Delta t)$. Para indivíduos que ainda não falharam até o instante t, consideramos a probabilidade condicional $P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)$.

Função taxa de falha ou risco

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ pode ser expressa em termos da função de sobrevivência como

$$P(t_1 \leq T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = S(t_1) - S(t_2).$$

A probabilidade de ocorrer falha no intervalo $[t, t + \Delta t)$ é $P(t \leq T < t + \Delta t)$. Para indivíduos que ainda não falharam até o instante t, consideramos a probabilidade condicional $P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)$.
Dividindo por Δt obtemos a taxa

$$\frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t},$$

Função taxa de falha ou risco

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ pode ser expressa em termos da função de sobrevivência como

$$P(t_1 \leq T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = S(t_1) - S(t_2).$$

A probabilidade de ocorrer falha no intervalo $[t, t + \Delta t)$ é $P(t \leq T < t + \Delta t)$. Para indivíduos que ainda não falharam até o instante t, consideramos a probabilidade condicional $P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)$.
Dividindo por Δt obtemos a taxa

$$\frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t},$$

que é a probabilidade de que a falha ocorra no intervalo $[t, t + \Delta t)$ dado que não ocorreu falha antes do tempo t dividida pelo comprimento do intervalo.

Tomando o limite em Δt obtemos a função taxa de falha ou risco

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\big((t \leq T < t + \Delta t) \cap (T \geq t)\big)}{P(T \geq t)\Delta t} \qquad (2) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{P(T \geq t)\Delta t} \\
&= \frac{1}{S(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&= \frac{f(t)}{S(t)}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Obs. Também denotada por $\lambda(t)$.

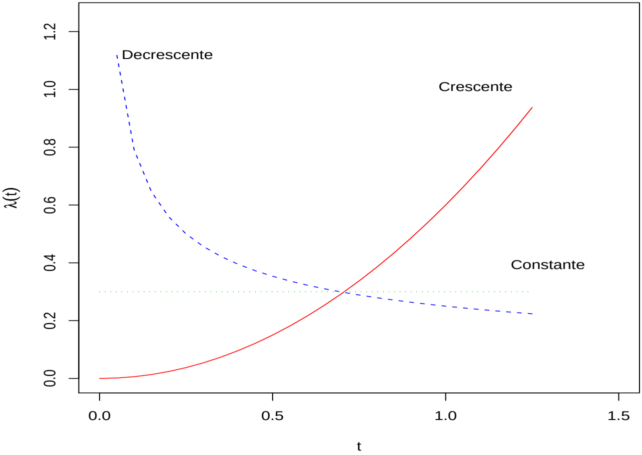
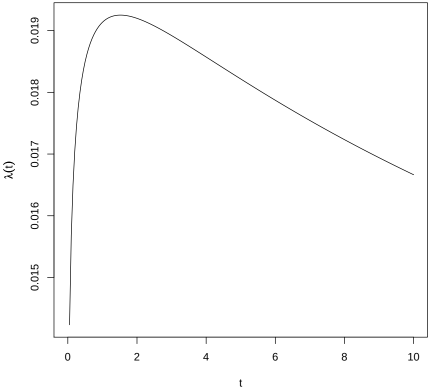


Figura 3: Algumas formas da função taxa de falha.


0.015
0.016
0.017
0.018
0.019
λ(t)
0
2
4
6
8
10
t

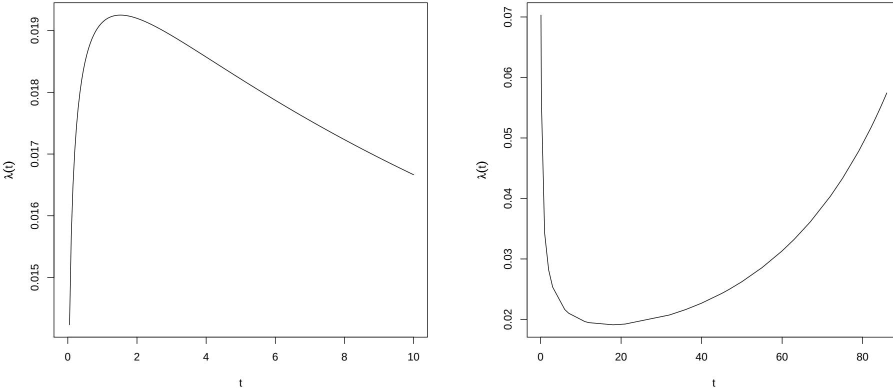


Figura 4: Função taxa de falha unimodal e forma de banheira (ou U)

Função taxa de falha acumulada

Para alguns propósitos é útil definir a função taxa de falha (ou risco) acumulada. É definida por

$$H(t) = \int_0^t h(u)du.$$

Obs. Também denotada por $\Lambda(t)$.

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t),$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t),$$

- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\log S(t),$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt}S(t),$$

- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt}\log S(t),$$

- $$H(t) = -\log(S(t)),$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt} S(t),$$

- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \log S(t),$$

- $$H(t) = -\log(S(t)),$$

- $$S(t) = \exp(-H(t)) = \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right) \text{ e}$$

Algumas relações entre as funções

- $$f(t) = -\frac{d}{dt} S(t),$$

- $$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \log S(t),$$

- $$H(t) = -\log(S(t)),$$

- $$S(t) = \exp(-H(t)) = \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right) \text{ e}$$

- $$f(t) = h(t)S(t) = h(t)\exp(-H(t)).$$

Algumas medidas em análise de sobrevivência

- O *tempo médio de vida* é obtida pela área sob a função de sobrevivência.

$$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty S(t)dt.$$

Algumas medidas em análise de sobrevivência

- O *tempo médio de vida* é obtida pela área sob a função de sobrevivência.

$$E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} S(t)dt.$$

- A *vida média residual* (VMR) é obtida pela área sob a curva de sobrevivência à direita do tempo t dividida por $S(t)$.

$$VMR(t) = E[T - t | T > t] = \frac{\int_t^{\infty}(u - t)f(u)du}{S(t)} = \frac{\int_t^{\infty} S(u)du}{S(t)}.$$

Algumas medidas em análise de sobrevivência

- O *tempo médio de vida* é obtida pela área sob a função de sobrevivência.

$$E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} S(t)dt.$$

- A *vida média residual* (VMR) é obtida pela área sob a curva de sobrevivência à direita do tempo t dividida por $S(t)$.

$$VMR(t) = E[T-t|T > t] = \frac{\int_t^{\infty}(u-t)f(u)du}{S(t)} = \frac{\int_t^{\infty} S(u)du}{S(t)}.$$

A VMR mede para indivíduos com idade t o tempo médio restante de vida,

Algumas medidas em análise de sobrevivência

- O *tempo médio de vida* é obtida pela área sob a função de sobrevivência.

$$E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} S(t)dt.$$

- A *vida média residual* (VMR) é obtida pela área sob a curva de sobrevivência à direita do tempo t dividida por $S(t)$.

$$VMR(t) = E[T - t | T > t] = \frac{\int_t^{\infty}(u - t)f(u)du}{S(t)} = \frac{\int_t^{\infty} S(u)du}{S(t)}.$$

  A VMR mede para indivíduos com idade t o tempo médio restante de vida, notando que $VMR(0) = E(T)$.

Algumas medidas em análise de sobrevivência

- O *tempo médio de vida* é obtida pela área sob a função de sobrevivência.

$$E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty S(t)dt.$$

- A *vida média residual* (VMR) é obtida pela área sob a curva de sobrevivência à direita do tempo t dividida por $S(t)$.

$$VMR(t) = E[T - t | T > t] = \frac{\int_t^\infty (u - t)f(u)du}{S(t)} = \frac{\int_t^\infty S(u)du}{S(t)}.$$

  A VMR mede para indivíduos com idade t o tempo médio restante de vida, notando que $VMR(0) = E(T)$.

- O *q-ésimo quantil* da distribuição de T é o valor t_q tal que

$$P(T \leq t_q) = q,\ 0 < q < 1.$$

Modelos de sobrevivência

Alguns modelos utilizados em Análise de Sobrevivência e Confiabilidade:

- Exponencial.
- Weibull.
- Gama.
- Log-logística.
- Log-normal.
- Gama generalizada.

Modelo exponencial

Uma variável aleatória T tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ (taxa) se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t > 0.$$

As funções sobrevivência e risco são

$$S(t) = e^{-\lambda t}, \; t > 0,$$

e

$$h(t) = \lambda, \; t > 0.$$

respectivamente.
Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

Modelo exponencial

Uma variável aleatória T tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ (taxa) se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \ t > 0.$$

As funções sobrevivência e risco são

$$S(t) = e^{-\lambda t}, \ t > 0,$$

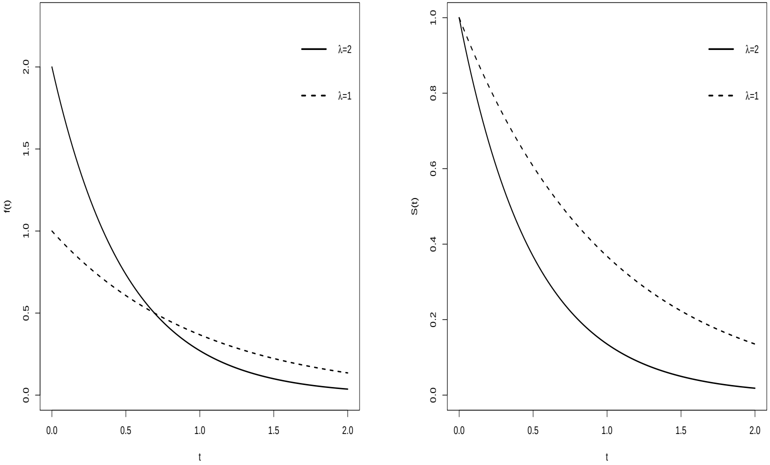
e

$$h(t) = \lambda, \ t > 0.$$

respectivamente.
Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

Obs. Modelo com taxa de falha constante (sem efeito do desgaste).

Modelo exponencial



Modelo exponencial

- O k-ésimo momento, $k \geq 1$, é dado por

$$E[T^k] = \lambda^{-k}\Gamma(k+1).$$

Modelo exponencial

- O k-ésimo momento, $k \geq 1$, é dado por

$$E[T^k] = \lambda^{-k}\Gamma(k+1).$$

- A média e a variância são dadas por

$$E(T) = 1/\lambda, \;\; \mathrm{Var}(T) = 1/\lambda^2.$$

Modelo exponencial

- O k-ésimo momento, $k \geq 1$, é dado por

$$E[T^k] = \lambda^{-k}\Gamma(k+1).$$

- A média e a variância são dadas por

$$E(T) = 1/\lambda, \;\; \mathrm{Var}(T) = 1/\lambda^2.$$

- O q-ésimo quantil é dado por:

$$t_q = -\log(1-q)/\lambda, \; 0 < q < 1. \tag{4}$$

- A mediana é

$$t_{0,5} = \log(2)/\lambda.$$

Modelo exponencial

- Vida média residual

$$VMR(t) = 1/\lambda.$$

- Propriedade da "falta de memória"

$$P(T > s + t | T > t) = P(T > s).$$

Modelo exponencial

- A distribuição exponencial é usada frequentemente para modelar componentes eletrônicos que geralmente não sofrem desgaste até muito tempo depois da vida esperada do produto no qual estão instalados.
- São exemplos os componentes de circuitos integrados de alta qualidade como diodos, transistores, resistores e capacitores.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

O tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

O tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

- A v.a. T representa o tempo até a falha de ventiladores de motores a diesel.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

O tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

- A v.a. T representa o tempo até a falha de ventiladores de motores a diesel.
- Do enunciado tem-se $T \sim Exp(\lambda)$ com $\lambda = 1/28700$.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

O tempos até a falha de ventiladores de motores a diesel tem distribuição exponencial com tempo médio de falha de 28700 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um destes ventiladores não falhar nas primeiras 8000 horas de funcionamento?

(b) Determine e interprete o quantil 1%.

(c) Determine o tempo de falha mediano.

(c) Determine o quantil correspondente ao tempo médio.

- A v.a. T representa o tempo até a falha de ventiladores de motores a diesel.
- Do enunciado tem-se $T \sim Exp(\lambda)$ com $\lambda = 1/28700$.
- (a) $P(T > 8000) = S(8000) = \exp(\frac{8000}{28700}) = 0,76$.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam até a garantia.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam até a garantia.

- (b) $t_{0,01} = -\log(1-0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288$ horas.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam até a garantia.

- (b) $t_{0,01} = -\log(1 - 0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288$ horas.
- Isso significa que é esperado que cerca de 1% dos ventiladores falhem nas primeiras 288 horas de uso.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam até a garantia.

- (b) $t_{0,01} = -\log(1 - 0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288$ horas.
- Isso significa que é esperado que cerca de 1% dos ventiladores falhem nas primeiras 288 horas de uso.
- (c) $t_{0,5} = \log(2)/\lambda = 28700 \log(2) = 19893$ horas.

Modelo exponencial - Exemplo (Nelson, 1990)

Se 8000 horas é o tempo de garantia dada pelo fabricante, significa que 24% é a fração esperada de ventiladores que falhariam até a garantia.

- (b) $t_{0,01} = -\log(1 - 0,01)/\lambda = 28700(-\log(0,99)) = 288$ horas.
- Isso significa que é esperado que cerca de 1% dos ventiladores falhem nas primeiras 288 horas de uso.
- (c) $t_{0,5} = \log(2)/\lambda = 28700 \log(2) = 19893$ horas.
- (d) Para $t_q = 28700$, qual é o valor de q? Usando a expressão (4) obtemos $\log(1 - q) = -1$ e $q = 1 - \exp(-1) = 0,63$. Ou seja, o tempo médio de falha corresponde ao quantil 63%.

Modelo Weibull

Uma v.a. T segue a distribuição Weibull com parâmetros $\lambda > 0$ (taxa) e $\alpha > 0$ (forma) se sua fdp é dada por

$$f(t) = \alpha\lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}}, \; t > 0 \tag{5}$$

Notação: $T \sim W(\alpha, \lambda)$.
A função de sobrevivência e a função risco são dadas por

$$S(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}, \; t > 0 \tag{6}$$

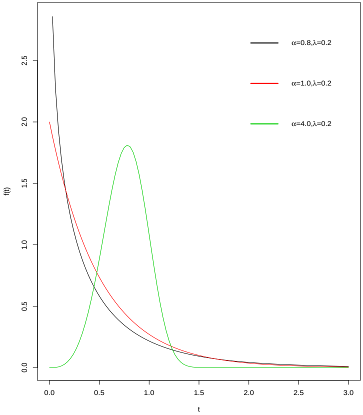
e

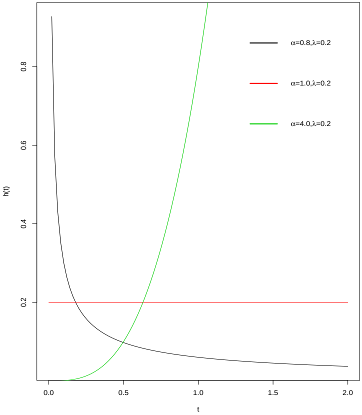
$$h(t) = \alpha\lambda t^{\alpha-1}, \; t > 0. \tag{7}$$

A função de risco tem as seguintes formas:

- Se $\alpha = 1$, a função risco é constante (distribuição exponencial),
- Se $\alpha < 1$, a função risco é decrescente e
- Se $\alpha > 1$, a função risco é crescente.

Gráficos da fdp e da função risco da distribuição Weibull





Momentos e função quantil do modelo Weibull

- O k-ésimo momento é dado por

$$E[T^k] = \lambda^{-k/\alpha}\Gamma(\frac{k}{\alpha} + 1)$$

- Média e variância

$$E(T) = \lambda^{-1/\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1), \;\; Var(T) = \lambda^{-2/\alpha}[\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)-\Gamma^2(\frac{1}{\alpha}+1)]$$

em que

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1}e^{-u}du$$

é a função gama.

Modelo Weibull

- q-ésimo quantil

$$t_q = \lambda^{-1/\alpha}[-\log(1-q)]^{1/\alpha},\ 0 < q < 1.$$

- Mediana

$$t_{0,5} = \lambda^{-1/\alpha}[\log(2)]^{1/\alpha}.$$

Modelo Weibull

- A vida média residual é dada por

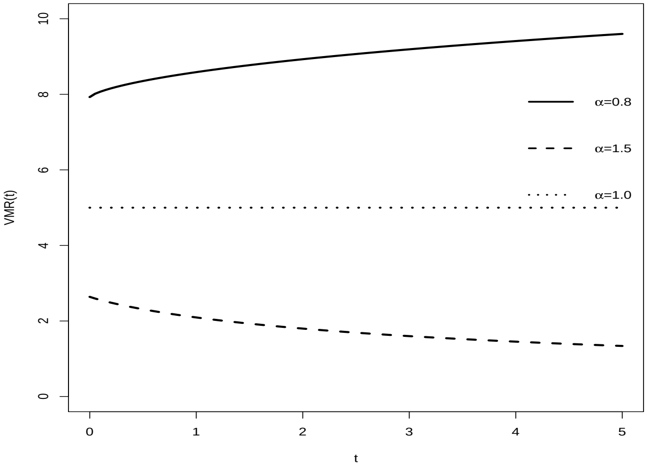
$$VMR(t) = \frac{\lambda^{-1/\alpha}\Gamma(1/\alpha, \lambda t^{\alpha})}{\alpha e^{-\lambda t^{\alpha}}},$$

em que

$$\Gamma(s,t) = \int_t^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du$$

é a função gama incompleta superior.

Gráfico do VMR para o modelo Weibull para $\alpha = 0.8, 1, 1.5$ e $\lambda = 0,2$



Uma v.a. T tem distribuição gama com parâmetros $\lambda > 0$ (taxa) e $\alpha > 0$ (forma) se sua f.d.p é dada por

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \ t > 0. \tag{8}$$

A função sobrevivência e a função risco são dadas por

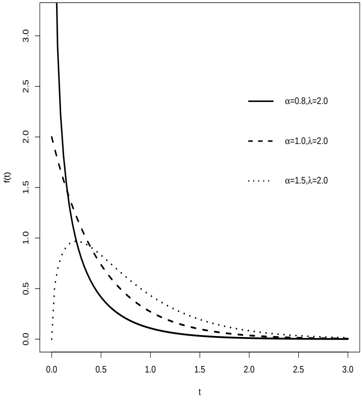
$$S(t) = \frac{\Gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}, \ t > 0 \tag{9}$$

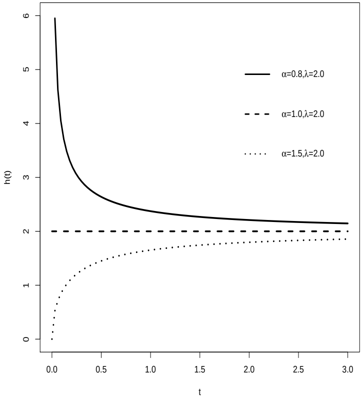
e

$$h(t) = \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha, \lambda t)}, \ t > 0. \tag{10}$$

Notação: $T \sim G(\alpha, \lambda)$.

Gráfico da fdp e da função risco da distribuição gama





Modelo gama

- k-ésimo momento:

$$E(T^k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\lambda^k \Gamma(\alpha)}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

Modelo gama

- k-ésimo momento:

$$E(T^k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\lambda^k \Gamma(\alpha)}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

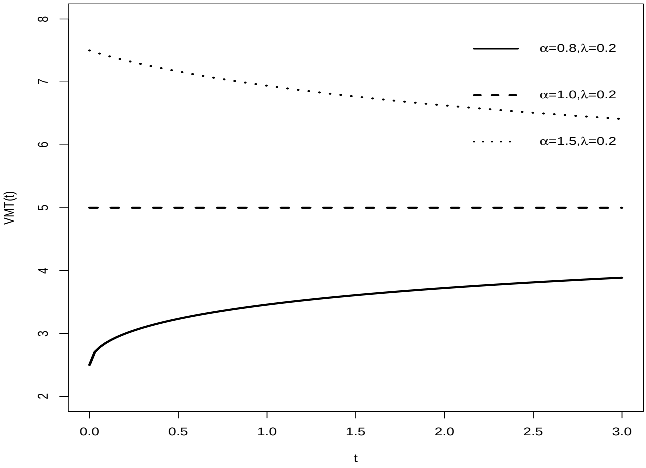
- Média e variância:

$$E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}, \;\; \mathrm{Var}(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

- Vida média residual:

$$VMR(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1, \lambda t)}{\lambda \Gamma(\alpha, \lambda t)} - t, \;\; t > 0 \qquad (11)$$

Gráfico da VMR para o modelo gama para $\alpha = 0,8, 1, 1,5$ e $\lambda = 0,2$



O modelo log-logistica

Uma v.a. T tem distribuição log-logistica com parâmetros $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ se sua fdp é dada por

$$f(t) = \frac{\alpha \lambda t^{\alpha-1}}{(1+\lambda t^{\alpha})^2}.$$

A função sobrevivência é dada por

$$S(t) = (1+\lambda t^{\alpha})^{-1}.$$

Notação: $T \sim LL(\alpha, \lambda)$.

O modelo log-logistica

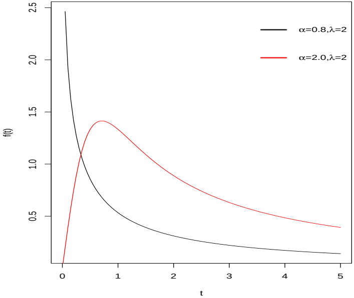
A função risco da distribuição log-logistica é dada por

$$h(t) = \frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}}{1+\lambda t^{\alpha}},$$

com $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$.

Formas da função risco

- $0 < \alpha \leq 1$: decrescente;
- $\alpha > 1$: unimodal.



O modelo log-logistica

q-ésimo quantil:

$$t_q = \lambda^{-1/\alpha} \left(\frac{q}{1-q} \right)^{1/\alpha}, \; 0 < q < 1.$$

Mediana:

$$t_{0,5} = \lambda^{-1/\alpha}.$$

Modelo log-normal

A v.a. T tem distribuição log-normal se sua fdp é dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}t\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \; t > 0,$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é a média de $\log(T)$ e $\sigma > 0$ é o desvio padrão de $\log(T)$. Temos que $\log(T) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Média e variância:

$$E(T) = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}, \;\; e \;\; Var(T) = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1).$$

q-ésimo quantil

$$t_q = \exp(\mu + \sigma z_q),$$

em que z_q é q-ésimo quantil da distribuição normal padrão.

Notação: $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

Modelo log-normal

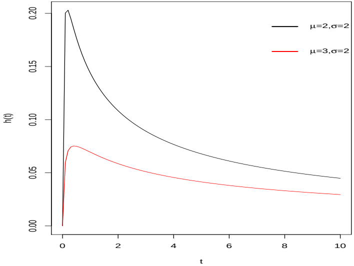
A função sobrevivência é

$$S(t) = \Phi\left(-\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right),$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição acumulada da distribuição normal padrão.

A função risco é dada por

$$h(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}}{\sqrt{2\pi}t\sigma\Phi\left(-\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)}.$$



Modelo gama generalizada

Uma v.a. T tem distribuição gama generalizada com parâmetros $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ e $p > 0$ se sua fdp é dada por

$$f(t) = \frac{p\lambda}{\Gamma(\frac{\alpha}{p})}(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^p}, \; t > 0. \tag{12}$$

A função sobrevivência e a função risco são dadas por

$$S(t) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{p}, (\lambda t)^p)}{\Gamma(\frac{\alpha}{p})}, \; t > 0, \tag{13}$$

e

$$h(t) = \frac{(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^p}}{\Gamma(\frac{\alpha}{p}, (\lambda t)^p)}, \; t > 0. \tag{14}$$

Modelo gama generalizada

Notação: $X \sim GG(\lambda, \alpha, p)$.

- k-ésimo momento:

$$E(T^k) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+k}{p})}{\Gamma(\frac{\alpha}{p})}, \; k = 1, 2, \ldots$$

- $GG(\alpha, \lambda, p = 1) = G(\alpha, \lambda)$.
- $GG(\alpha, \lambda, p = \alpha) = W(\alpha, \lambda^\alpha)$.

Exercícios

1. Para os modelos log-logística, log-normal e gama generalizada determine o valor médio residual e mostre o comportamento dessas características ao longo do tempo.
2. Para o modelo gama generalizada, represente graficamente a função risco.
3. Para o modelo gama generalizada, determine a média e a mediana.