1. Temos que verificar se os conjuntos são fechados em relação às operações definidas e se são satisfeitos os axiomas de espaço vetorial.

   (a) Dados (x_1, y_1, z_1) e $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, a adição usual é tal que $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e a multiplicação por escalar $\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1)$. Ora, $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \alpha \in \mathbb{R}$, e a soma e o produto entre números reais nos dão outros números reais, de modo que V é fechado em relação às operações definidas. Vejamos agora os axiomas de espaço vetorial. Primeiramente a comutatividade da adição. Temos que $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1) = (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1)$ pois $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$ e os números reais são comutativos em relação à adição. Agora a associatividade da adição. Se (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) e $(x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$, então $(x_1, y_1, z_1) + ((x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3), z_1 + (z_2 + z_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3) = ((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) + (x_3, y_3, z_3)$ e aqui usamos a propriedade associativa dos reais. Vetor nulo. Seja $n = (n_1, n_2, n_3)$ que satisfaz $(x, y, z) + (n_1, n_2, n_3) = (x, y, z)$. Vejamos se tal $n \in \mathbb{R}^3$. Temos que n satisfaz $(x + n_1, y + n_2, z + n_3) = (x, y, z)$, e obtemos três equações (uma para cada coordenada). Da primeira, $x + n_1 = x$ que só é verdade se $n_1 = 0$. Analogamente, $n_2 = n_3 = 0$, donde vem que $n = (0, 0, 0)$ é o vetor nulo e que está em $\mathbb{R}^3$, pois $0 \in \mathbb{R}$. Inverso aditivo. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer. Seja (x', y', z') que satisfaz $(x, y, z) + (x', y', z') = (0, 0, 0)$. Daí vem que $(x + x', y + y', z + z') = (0, 0, 0)$ e obtemos três equações. Da primeira, $x + x' = 0$, vem que $x' = -x$. De maneira análoga, $y' = -y$ e $z' = -z$. Então $(x', y', z') = (-x, -y, -z) \in \mathbb{R}^3$ pois, uma vez que $x, y, z \in \mathbb{R}$, $-x, -y, -z$ também são reais. Associatividade da multiplicação por escalar. Sejam α e $\beta \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então $\alpha(\beta(x, y, z)) = \alpha(\beta x, \beta y, \beta z) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y), \alpha(\beta z)) = ((\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y, (\alpha\beta)z) = (\alpha\beta)(x, y, z)$. Mais uma vez tivemos que usar a propriedade associativa dos números reais. Distributividades. Sejam α, β e (x, y, z) como anteriormente. Então, $(\alpha + \beta)(x, y, z) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y, (\alpha + \beta)z) = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta x, \beta y, \beta z) = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z)$. Aqui foi usada a propriedade distributiva dos números reais. Para mostar a outra, seja α como anteriormente e (x_1, y_1, z_1) e $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Então $\alpha((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2), \alpha(z_1 + z_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2, \alpha z_1 + \alpha z_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2) = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \alpha(x_2, y_2, z_2)$. Novamente, usamos a propriedade distributiva dos reais. Finalmente o elemento (escalar) neutro para a multiplicação. Seja λ que satisfaz $\lambda(x, y, z) = (x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (x, y, z)$ nos dá três equações cuja solução, para λ, é $\lambda = 1 \in \mathbb{R}$, ou seja, tal elemento neutro para a multiplicação existe.

Uma vez que V é fechado com relação às operações e satisfaz os oito axiomas de espaço vetorial, concluímos que $(V, +, \cdot)$ é espaço vetorial.

(b) Esse é análogo ao anterior. É espaço vetorial

(c) Nesse podemos escrever y em função de x e daí obtemos vetores da forma $(x, \frac{3x-1}{2})$. Então temos de repetir o que fizemos no item a. Você descobrirá que esse conjunto não é fechado em relação à soma, pois somando dois vetores daquela forma o resultado é um vetor que não pode ser escrito daquela forma. Portanto não é espaço vetorial.

(d) Aqui, se escrevermos y em função de x, os vetores obtidos serão da forma $(x, \frac{3x}{2})$. Repetindo os passos do item, conclui-se que esses vetores formam um espaço vetorial. Note que a equação $3x - 2y = 0$ dá uma reta que passa pela origem. A equação do item anterior, $3x - 2y = 1$, também dá a mesma reta só que deslocada uma unidade "para cima". Ora, sabemos que os subespaços de $\mathbb{R}^2$, além dos subespaços triviais, são retas que passam pela origem. Sabendo disso, já poderíamos dizer que, como todo subespaço é espaço vetorial, o conjunto dado nesse item é espaço, enquanto que o do item anterior não é.

(e) Nesse caso, temos de mostrar que a soma de duas funções pares e a multiplicação de um esccalar por uma função par é uma função par. Note que, a função f é um vetor, enquanto que a função aplicada num dado x, $f(x)$, é um número real. Ora, sejam f e $g \in V$, ou seja, funções pares. Então temos de verificar que a equação $(f + g)(x) = (f + g)(-x)$ vale para todo x real. Lembrando que a soma de duas funções é dada por $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$. Então $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$ é uma função par, donde vem que o conjunto é fechado em relação à soma. Agora a multiplicação por escalar. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in V$. Então, como a multiplicação de uma função por um real é dada por $(\lambda h)(x) = \lambda h(x)$, temos que $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x)$ também é uma função par, de modo que o conjunto também é fechado em relação à multiplicação por escalar. Feito isso basta verificarmos os axiomas de espaço vetorial, que é análogo ao que foi feito no item a. Você desobrirá que esse conjunto, com essas operações, é espaço vetorial.

(f) Note que aqui os nossos vetores são todos os números reais estritamente positivos, e a soma desses vetores é dada pela multiplicação usual dos respectivos números reais, e a multiplicação por um escalar é dada fazendo o vetor (que é um número real) elevado ao escalar. Você descobrirá que o vetor nulo é o número real 1, bem como o elemento neutro da multiplicação por escalar. Entretanto esse número 1 tem aspectos diferentes: um vetorial e outro escalar. Pode-se verificar que o dado conjunto é fechado em relação às operações, ou seja quando você opera números reais estritamente positivos da maneira como nos foi dada, os resultados dessas operações são, também, números reais estritamente positivos. Os oito axiomas de espaço vetorial também são satisfeitos. Então esse conjunto, com essas operações também é espaço vetorial.