

ICMC – USP
SME0818 – Inferência Estatística – 2022/1
Lista 3

1. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta)$, $0 < \theta < 1$.

(a) Apresente um estimador não viesado para θ^2 .

(b) Com base nas observações

1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

apresente uma estimativa para θ^2 .

(c) Qual o menor valor possível da variância de um estimador não viesado para θ^2 ? A variância do estimador do item 1a é igual a este valor?

2. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Existe uma função $g(\theta)$ para a qual é possível obter um estimador não viesado cuja variância é igual ao valor dado pela desigualdade da informação? Se sim, (i) apresente $g(\theta)$, seu estimador não viesado e sua variância. (ii) O estimador obtido é um ENVVUM?

3. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Apresente os menores valores possíveis das variâncias de estimadores não viesados para θ , θ^2 e $P(X > 0; \theta)$.

(b) Apresente um estimador não viesado para cada uma das funções de θ do item anterior.

4. $T_1 = T_1(X_1, \dots, X_n)$ e $T_2 = T_2(X_1, \dots, X_n)$ são dois estimadores independentes e não viesados de θ . Apresente estimadores não viesados para θ^2 e $\theta(1 - \theta)$.

5. X_1 é uma observação de uma população $\text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$.

(a) Prove que $(-1)^{X_1}$ e $(-2)^{X_1}$ são estimadores não viesados de $e^{-2\theta}$ e $e^{-3\theta}$, respectivamente.

Sugestão. $\sum_{x=0}^{\infty} k^x \theta^x / x! = e^{\theta k}$.

(b) Aponte um aspecto desfavorável dos estimadores do item anterior.

6. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da variável X com função densidade

$$f(x; \theta) = \exp\{-(x - \theta)\} I_{[\theta, \infty)}(x), \theta > 0.$$

(a) Prove que $T_1 = \bar{X} - 1$ e $T_2 = X_{(1)} - 1/n$ são estimadores não viesados de θ , sendo que $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(b) Qual dos dois estimadores do item anterior você escolheria?

Sugestão. $f_{X_{(1)}}(y) = n\{1 - F(y; \theta)\}^{n-1} f(y; \theta) I_{[\theta, \infty)}(y)$.