USP/ICMC/SMA - 2ª Lista de SMA-333 - Cálculo III e SMA-356 - CÁLCULO IV - Séries Numéricas 03/2016.
Professor: Sergio H. Monari Soares e equipe

1. Enumere todos os testes para verificação de convergência e de divergência de séries.

2. Determine o valor de $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ e de $\sum_{n=7}^{\infty} 2^{-n}$.

3. Mostre que as desigualdades abaixo estão satisfeitas a partir de algum natural N_0, isto é, mostre que existe um natural N_0, tal que, para todo $n \geq N_0$ as desigualdades abaixo estão satisfeitas:

$$a)\ \ln(n) \leq n \quad b)\ \ln(n) \leq \sqrt(n) \quad c)\ n^2 \leq 2^n \quad d)\ \sqrt(n) \leq n$$

4. Verifique quando as séries geométricas abaixo convergem ou divergem. E se convergirem qual o valor de sua soma.
a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$ e) $\sum_{n=3}^{4} 3(0,999999)^n$ f) $\sum_{n=10^6}^{\infty} 10^{-100}(6/5)^n$.

5. Observando-se que as séries abaixo são geométricas verifique em qual intervalo da reta elas convergem e neste caso para qual função de x cada uma converge.
a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

6. a) Seja $0,66666666.....$ Podemos escrever tal número como

$$6 \cdot 0,11111111..... = 6\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right) = \frac{6}{10}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}.$$

Assim usando as propriedades da série geométrica verifique como representar $0,66666666....$ na forma de fração, ou melhor, de um número racional.

7. Repita o exercício anterior para
a) $1,13555555...$ b) $0,15151515...$ c) $1,013013013......$

8. Mostre que as séries abaixo são as mesmas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+6n+10}$$

9. Verifique o valor para o qual as séries abaixo convergem indicando o critério usado:
a) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{2k+1})(\frac{1}{2k+3})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n+2)} - \frac{1}{ln(n+1)}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$
d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$ f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

10. Determine uma série que possui a seguinte sequência de somas parciais(ou reduzidas):

$$a)\ S_n = \frac{4n}{n+1} \quad b)\ S_n = \frac{2n}{3n+1} \quad c)\ S_n = \frac{n^2}{n+1} \quad d)\ S_n = 2^n$$

11. i) Use o teste da integral para verificar se as séries abaixo convergem ou divergem:

$a)\sum_{n=1} \frac{n}{e^{n^2}}$ $b)\sum_{n=1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $c)\sum_{n=1} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$ $d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ $e)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ para algum real p fixo.

ii) Em todos os itens anteriores você diria que o teste da integral é o mais indicado para decidir se tais séries convergem ou divergem? Estude cada caso.

12. Decida se as séries abaixo convergem ou divergem indicando o critério usado:

$a)\sum 1/n^n$ $b)\sum(\frac{n}{n+1})^n$ $c)\sum \frac{n+1}{n(n-1)}$ $d)\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
$e)\sum \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$ $f)\sum \frac{3}{n^2+1}$ $g)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ $h)\sum 1/(10^n)$
$i)\sum \frac{n^2+3n-7}{n^3-2n+5}$ $j)\sum \frac{3+cos\, n}{n^2}$ $k)\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ $l)\sum \frac{n^{1/n}}{n}$

13. Analise se as séries abaixo convergem ou não indicando o teste usado:

$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgn}{n^{1.1}}$ $b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ $d)\sum_{n=1} \frac{n!}{n^n}$
$e)\sum_{n=1} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$ $f)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3^n(n!)^2}$ $g)\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n$ $h)\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\frac{2n-1}{n+13})^n$
$i)\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ $j)\sum \frac{ln\, n}{n^3}$ $k)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$ $l)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{1/2}}$
$m)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ $n)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ $o)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(n+1)^n}$ $p)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$

14. Em cada caso, verificar se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ é divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente. Observe que nestes exercícios não é possível aplicar o critério da série alternada.

$$a)\ \begin{cases} a_{2n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1} \text{ e } a_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1} \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \text{ e } a_{2n} = \dfrac{1}{3^{2n-1}} \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n-1} \text{ e } a_{2n} = \dfrac{1}{3^n} \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} a_{2n-1} = \dfrac{1}{4n-1} \text{ e } a_{2n} = \dfrac{1}{4n-3} \end{cases}$$

15. a) Verifique se as séries abaixo convergem:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{10})^n$ $\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})$ $\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$ $\quad f)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}[\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}]$.

b) Das séries convergentes acima determine um valor aproximado para as mesmas com erro inferior à $0,01$.

16. Classifique cada uma das séries abaixo em **(D) divergente** ou **(CD) condicionalmente convergente** ou **(AC) absolutamente convergente**:

$a)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+10}}$ $\quad b)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ $\quad c)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ $\quad d)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{1/n}}$

$e)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{n^3}{1+n^5}$ $\quad f)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{ln(n+2)}$ $\quad g)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{ln\, n}{\sqrt{n}}$ $\quad h)(\ )\sum(-1)^{n+1}sen\, n\pi$

$i)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{(sen\, n)^2}{n^2}$ $\quad j)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{(sen\, n)^2}{n^{9/2}}$ $\quad k)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$ $\quad l)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{n^4 3^n}{n!}$

$m)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ $\quad n)(\ )\sum(-1)^{n+1}[\sqrt{n^2+n}-n]$ $\quad o)(\ )\sum\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$ $\quad p)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n-\ln n}$

17. Encontre os valores de a para os quais $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$ converge.

18. Mostre que se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ é convergente então $\sum a_n^2$ também é convergente.

19. Dê exemplo de uma série $\sum a_n$ que seja convergente mas que $\sum a_n^2$ divirja.

20. Sejam $0 < a < b < 1$. Mostre que a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$ é convergente.

21. Mostre que se $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ convergem então $\sum a_n b_n$ é absolutamente convergente.

22. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja uma série convergente de termos não negativos. Com base neste fato, responda:
    a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ converge ou diverge? Justifique.
    b) $\sum_{n=1}^{\infty} na_n/(n^2+1)$ converge ou diverge? Justifique.
    c) b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/[(a_n)^2+1]$ converge ou diverge? Justifique.

23. Use fatos conhecidos para construir:
    a) Uma série de termos não negativos que convirja para $s = 7$.
    b) Construa uma série telescópica que convirja para $s = 7$.

24. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Exiba exemplos quando forem falsas:
    (a) Toda série alternada é condicionalmente convergente.
    (b) Toda série absolutamente convergente é convergente.
    (c) Toda série convergente é absolutamente convergente.
    (d) Toda série alternada converge.
    (e) Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem então $\sum \alpha(a_n) + \sum \beta(b_n)$ diverge para todo $\alpha, \beta \in R$.
    (f) Se $\sum |a_n|$ diverge então $\sum a_n$ é condicionalmnente convergente.
    g) Se $a_n \to 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
    h) Se $a_n \to 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
    i) Se $\sum_{n=1}^{n\to\infty} a_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ diverge.

25. Use o critério geral da razão para determinar todos os valores de x para os quais as séries abaixo sejam convergentes e os valores para os quais elas são divergentes.

$a)\ \sum\frac{x^n}{n^2}$ $\quad b)\ \sum\frac{n!x^n}{n^n}$ $\quad c)\ \sum e^{nx}$

$d)\ \sum 2^n x^n$ $\quad e)\ \sum x^n sen\frac{1}{n}$ $\quad f)\ \sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$