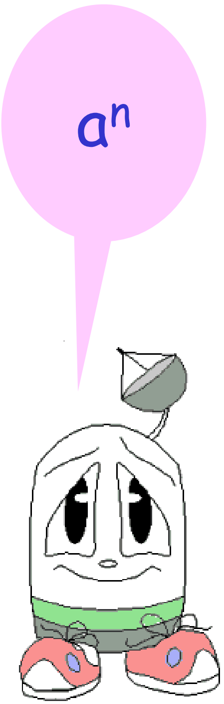
Propriedades de Linguagens Regulares



Lema do Bombeamento

Operações Fechadas sobre LR's

Aplicações

(H&U, 1969),(H&U, 1979),

(H;M;U, 2001) e (Menezes, 2002)

Lema do Bombeamento para LR

- Como decidir que uma linguagem é ou não regular?
  - Não bastaria não conseguir exibir um AF ou uma ER
- Toda linguagem regular satisfaz o Lema do bombeamento (LB).
- Se alguém apresenta a você uma falsa LR, use o LB para mostrar a contradição, pois ela não vai satizfazer o LB.

- O Lema do Bombeamento (Pumping Lemma) nos diz que qualquer cadeia suficientemente longa w de uma LR pode ser decomposta em 3 partes:

  w = xyz, de maneira que podemos construir outras cadeias da linguagem pela repetição da parte central y.

- Todas as cadeias da forma xy^kz são também da linguagem. Ou seja, podemos acionar a *bomba* quantas vezes quisermos, para criar quantas sentenças novas da linguagem desejarmos: xz, xyz, xyyz, xyyyz, …

Mostrando que uma Linguagem não é Regular

- Para mostrar que uma linguagem não é regular, mostramos que
  - não há como decompor uma cadeia (qualquer, arbitrariamente longa) da linguagem de forma que seja possível *bombear* e continuar na linguagem.

Lema do Bombeamento

Se L é uma linguagem regular, então:

existe uma constante natural n (que depende de L) tal que, para qualquer cadeia w de L com $|w| \geq n$, pode ser decomposta em três cadeias x, y, z ($w = xyz$) de forma que:

- **$|xy| \leq n$**
- **$y \neq \lambda$ (isto é, $|y| \geq 1$) e**
- **para qualquer $k \geq 0$, $xy^kz \in L$.**

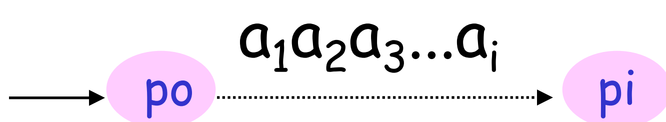
- **Demonstração (simplificada)**: Baseia-se no fato de que para as cadeias *longas* w é necessário usar pelo menos um loop de estados num AFD que aceite a linguagem.

- Assim, os símbolos de x são usados para chegarmos a um estado q do loop;
- os símbolos de y são usados para dar a volta no loop, de volta ao estado q;
- os símbolos de z são usados para ir de q até um estado final.
- Portanto, podemos dar quantas voltas no loop quisermos, e repetir y um número qualquer k de vezes: xy^kz.

As cadeias curtas (comprimento < n) não são consideradas porque podem ser aceitas sem passar por qualquer loop.

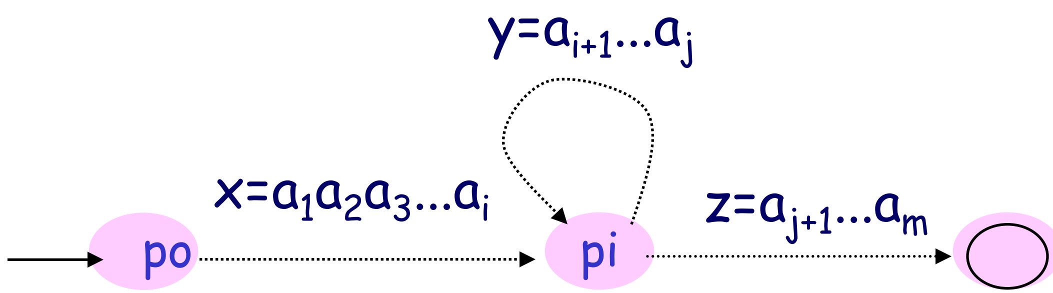
Prova formal do Lema do Bombeamento

Suponha que L seja regular. Então existe um AFD *A*, com n estados, que a reconhece. Considere qualquer string w de comprimento n ou maior: $w=a_1a_2a_3...a_m$, onde $m \geq n$, e cada a_i é um símbolo de entrada. Para i=0,1,...n, defina o estado p_i como $\delta(qo,a_1a_2a_3...a_i)$. Isto é, p_i é o estado em que *A* se encontra depois de ler os primeiro i símbolos de w. Note que po=qo.



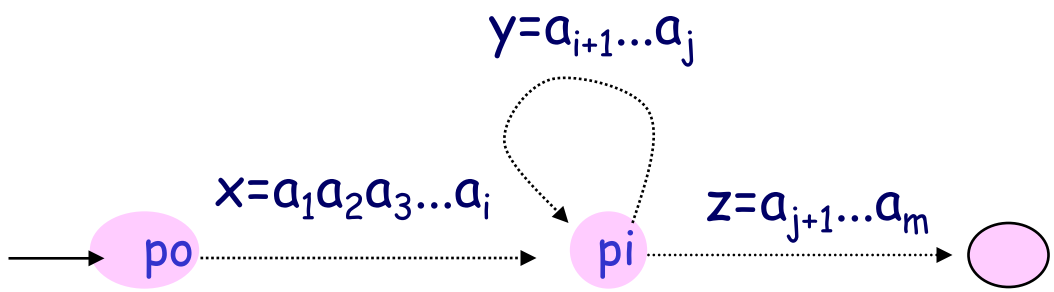
Como só existem n estados, não é possível que os n+1 diferentes p_i, para i=0, 1...n sejam distintos. Desse modo, podemos encontrar dois inteiros diferentes, i e j, com $0 \leq i < j \leq n$, tais que $p_i = p_j$. Agora, podemos dividir w = xyz como a seguir:

1. $x = a_1 a_2 a_3 \ldots a_i$
2. $y = a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_j$
3. $z = a_{j+1} a_{j+2} \ldots a_m$



Observe que x pode ser vazio (i=0) e z pode ser vazio, se j=n=m. Mas y não pode ser vazio, pois i é estritamente menor que j. Também é verdade que $|xy| \leq n$. Falta verificar a última condição:

Vejamos o que acontece com A para entradas xy^kz para qualquer $k \geq 0$:



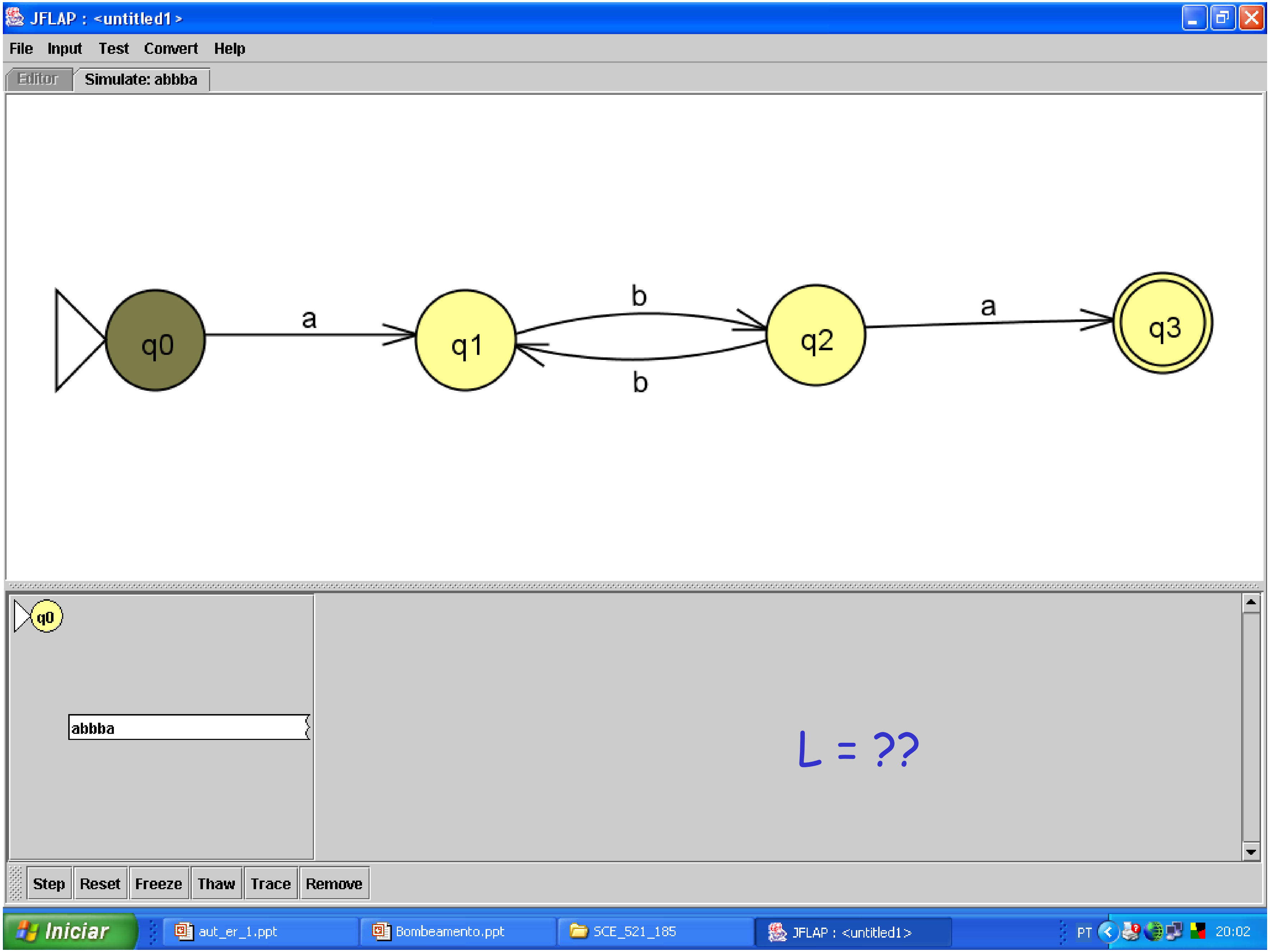
•Se k=0 (w=xz): *A* vai de po para pi na entrada x. Tendo em vista que $p_i=p_j$, *A* deve ir de p_i para o estado final, para a entrada z. Desse modo, *A* aceita xz.

•Se k >0 ($w=xy^kz$): *A* vai de po a pi sobre a entrada x, circula de p_i para p_i k vezes para a entrada y^k, e depois vai para o estado de aceitação para a entrada z. Dessa forma, para qualquer $k\geq 0$, xy^kz também é aceito por *A*; ou seja, xy^kz está em L.□ □ □

Provando que uma linguagem L não é regular

- Seja L o conjunto das cadeias w sobre {0,1} tal que $w=0^n1^n$.
- Supondo que L seja regular, pelo Lema do Bombeamento, se $w \in L$, então $w=xyz$ e $y \neq \varepsilon$, e $|xy| \leq n$, e $xz \in L$ e $xy^kz \in L$.
- Se $|xy| \leq n$ e como xy é um prefixo de w, então x e y consistem apenas em símbolos 0.
- Pelo Lema, então $xz \in L$. Porém, xz deve ter n 1´s, já que nenhum apareceu em xy. Por outro lado, xz tem menos de n 0´s, pois perdemos os 0´s de y. Como $y \neq \varepsilon$, não pode haver mais que n-1 0´s entre x e z.
- Assim, supondo L regular, concluímos um absurdo: o de que $w=xz=0^{n-1}1^n \in L$.
- Logo, L não é regular.

Exemplo provando que L é Regular



- Seja L = $\{ab^n a \mid n >= 1$ e ímpar$\}$ ou $\{ab^{2n+1}a \mid n>=0\}$

- Pelo Lema do Bombeamento, temos que:

- seja n = 4
- Para w = abbba $|w| = 5 >= 4$

  Sejam:
  - $x = a$
  - $y = bb$ $\quad |xy| <= 4; \; |y| >= 1$
  - $z = ba$

Para todo $k >= 0$ $a(bb)^k ba \in L$

Exemplo provando que L **não** é regular

$L = \{a^i\, b^i \mid i \geq 0\}$ (Já vimos que L é uma LLC.)

Seja i = n + 1.

Considere a cadeia $z = a^i b^i$. Qualquer decomposição z = uvw deve ter em v o mesmo número de a´s e de b´s, para que a propriedade de que o número de a´s é igual ao de b´s se mantenha nas cadeias $u v^k w$.

- Se isso não acontecer, quando acrescentarmos mais um v (aumentando k de 1), obteremos uma cadeia fora da linguagem. Portanto, v deve ser da forma $a^j b^j$, com j >0, já que v não pode ser vazia.
- Mas nesse caso, $u v^2 w$ conterá a cadeia $a^j b^j a^j b^j$, com pelo menos um a e depois um b, o que não pode acontecer na linguagem.

- Ou seja, nenhuma decomposição é possível, contrariando o Lema, e podemos concluir que L não é regular.

- OU
- Considere a cadeia $z = 0^n1^n$; z pode ser dividida em 3 pedaços = uvw onde para i >= 0 a cadeia uv^iw pertence a L. Vamos considerar 3 casos para mostrar que este resultado é impossível:

- 1) a cadeia v consiste somente de 0´s. Neste caso, a cadeia uvvw tem mais 0´s do que 1 violando o LB.
- 2) a cadeia v consiste somente de 1´s. Este caso também dá uma contradição.
- 3) a cadeia v consiste de 0´s e 1´s. Neste caso a cadeia uvvw tem o mesmo número de 0´s e 1´s mas não estão na ordem desejada pois v = 0101. E assim ela não é membro de L o que é uma contradição.

- A contradição é inevitável se nós aceitamos a suposição de que B é regular. Assim, B não é regular.

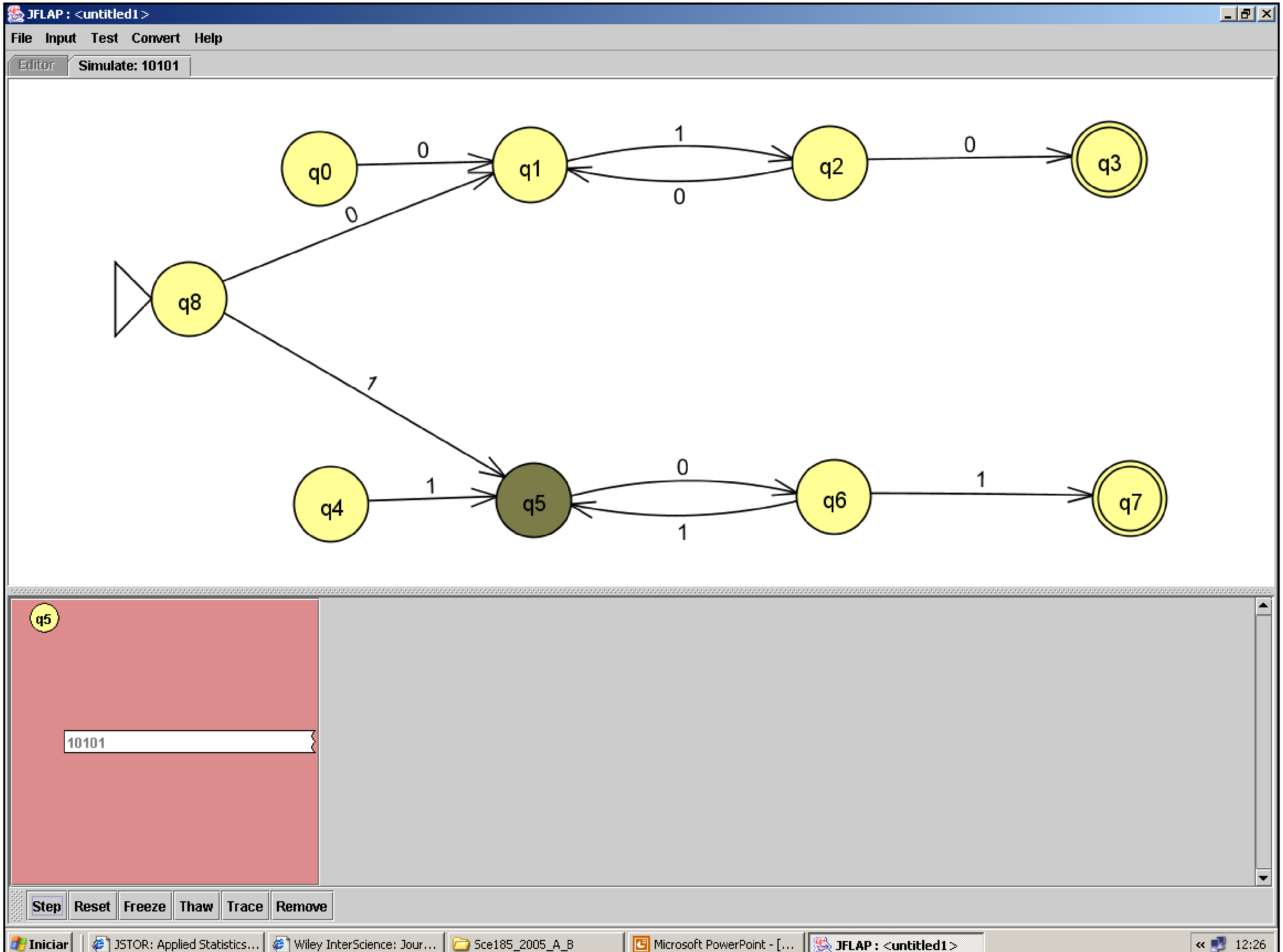
Mostre que a Linguagem abaixo é Regular

- L = {w | w tem um número igual de ocorrências de subcadeias 01 e 10 e somente elas}.

- Por exemplo, 101 $\in$ L pois contém 1 ocorrência de 01 e uma de 10 MAS 1010 não pertence, pois contém dois 10 e um 01.
- 010 também pertence e 0101 não.
- Cadeias que pertencem a linguagem são:
  - 101, 10101, 1010101, ...,
  - 010, 01010,0101010,....

- Embora possa parecer que a máquina precise contar as cadeias acima, como na linguagem 0^n1^n, podemos estar errados...

O AF solução é a união de 2 AF´s



Exercícios

Mostre que as linguagens abaixo não são regulares:

1) $L = \{ xx^r \mid x \in \{0,1\}^* \}$
2) $L = \{0^n10^n \mid n >= 1\}$
3) $L = \{0^n1^m2^n \mid n$ e m são inteiros quaisquer$\}$
4) $L = \{0^n1^m \mid n <= m\}$
5) $L = \{0^n1^{2n} \mid n >= 1\}$

Operações que preservam a propriedade de ser uma LR

- Existem muitas operações que, quando aplicadas a LR resultam em uma LR (dizemos que são fechadas). Entre elas temos: união, complemento e intersecção (operações booleanas), concatenação, fechamento, diferença e reverso ($a_1a_2...a_n \rightarrow a_n...a_2a_1$).

- Veremos a prova para as 6 primeiras propriedades acima.

- Elas são úteis também como ferramentas de construção de autômatos.

- Por exemplo, a propriedade da união ajuda a construir o autômato para
  - $L(M) = \{ x \in \{0,1\}^* \mid$ o nro de 1's em x é múltiplo de 3 OU de 4$\}$
  - e também o AF para o Analisador Léxico de um compilador

Propriedade de Fechamento das Linguagens da Hierarquia de Chomsky

Fechamento sobre	LR	LLC	LSC	LEF
união	S			
concatenação	S			
fechamento	S			
complemento	S			
intersecção	S			
diferença	S			
reverso	S			

Lema 3.1 (H&U, 69) – União

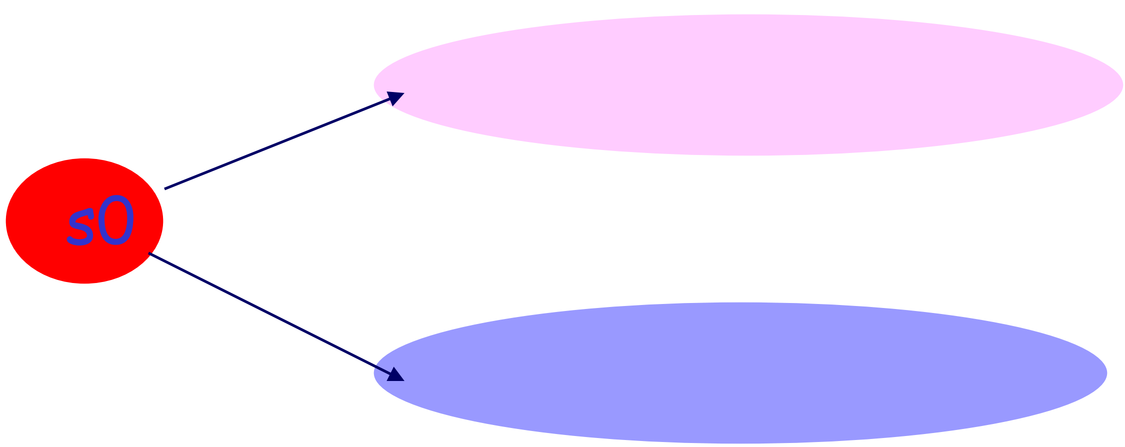
- A classe das LR é fechada sobre a união. Se L1 é LR e L2 é LR então L1 $\cup$ L2 também é.
- (Prova via ER: direta)
- **PROVA**: Sejam L1 e L2 reconhecidas por AF M1 = (Q1,Σ1,δ1,qo,F1) e M2 = (Q2,Σ2,δ2,ro,F2). Suponha Q1 $\cap$ Q2 = $\emptyset$ e so $\notin$ Q1; so $\notin$ Q2.

M3 = (Q1 $\cup$ Q2 $\cup$ {so}, Σ1 $\cup$ Σ2, δ3, so, F) é um AFND onde:

- Se $\lambda \in$ L1 ou L2 então $F = F1 \cup F2 \cup \{so\}$ cc. $F = F1 \cup F2$

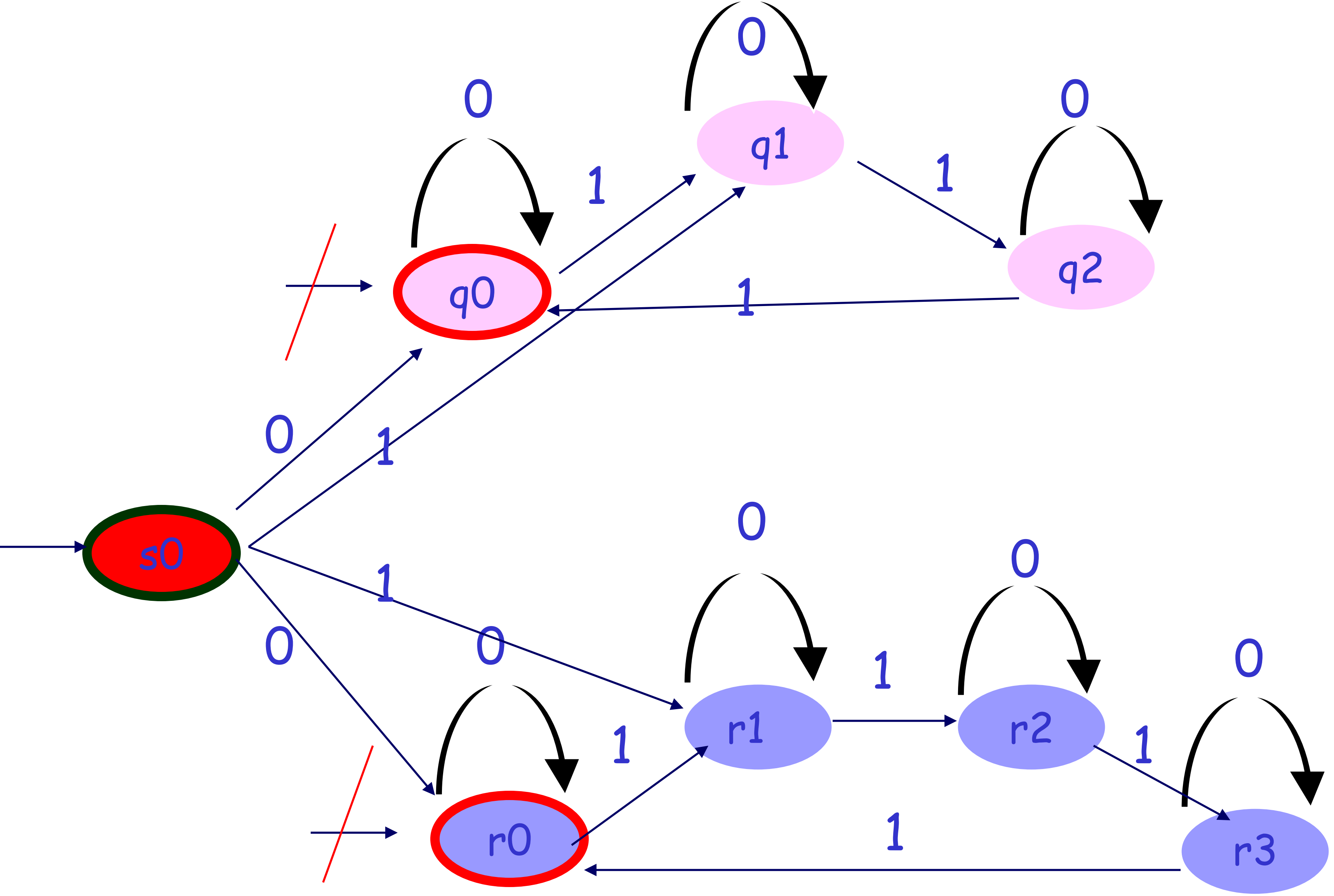
- $$\delta 3 \begin{cases} 1)\ \delta 3(so,a) = \{\delta 1(qo,a), \delta 2(ro,a)\} \text{ para todo } a \in \Sigma 1 \cup \Sigma 2 \\ \left.\begin{array}{l} 2)\ \delta 3(q,a) = \delta 1(q,a) \text{ para todo } q \in Q1 \text{ e } a \in \Sigma 1 \\ 3)\ \delta 3(q,a) = \delta 2(q,a) \text{ para todo } q \in Q2 \text{ e } a \in \Sigma 2 \end{array}\right\} \text{Continuam os mesmos} \end{cases}$$

$$L(M3) = L(M1) \cup L(M2)$$



Exemplo

- Use o Lema 3.1 para fazer um AFND que reconheça $L(M) = \{ x \in \{0,1\}^* \mid$ o nro de 1's em x é múltiplo de 3 OU de 4$\}$



M3 = ?

Lema 3.2 (H&U, 69) - Complemento

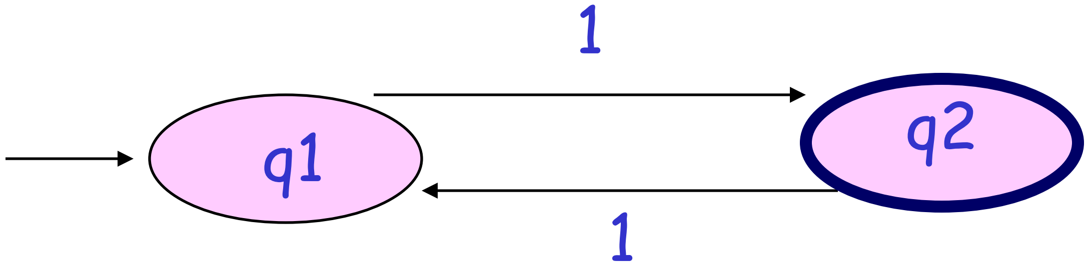
- A classe dos conjuntos aceitos por um AF é fechada sobre o complemento (Se L é uma LR então $\overline{L}$ também é).

- **Prova:** M1 = (Q, Σ1,δ1, qo,F) é um AF que aceita um conjunto L1. Seja Σ2 um alfabeto contendo Σ1 (pode ser o mesmo) e d um estado $\notin$ Q. M2 aceita Σ2* - L1.

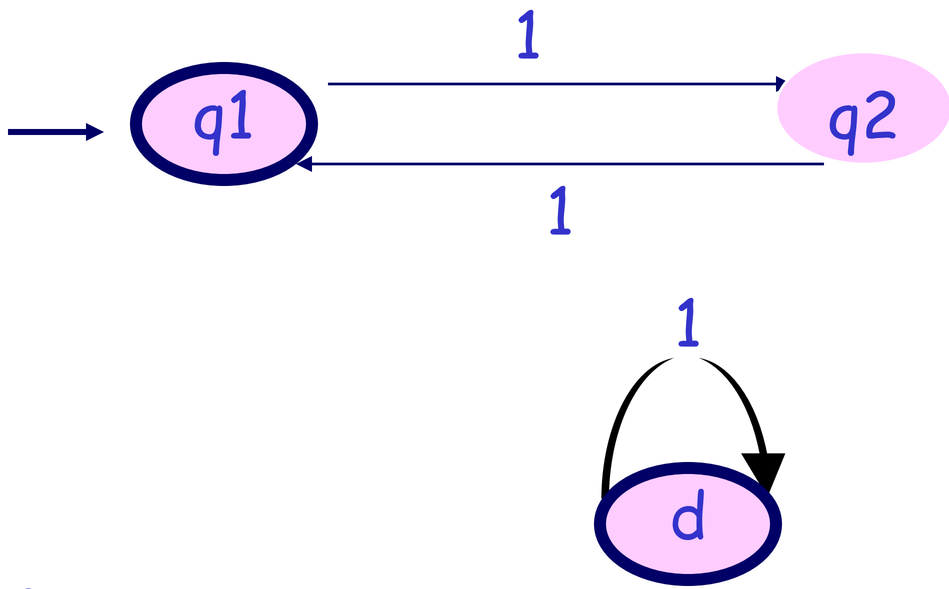
- M2 = (Q $\cup$ {d}, Σ2, δ2, qo, (Q – F) $\cup$ {d})

- $\delta 2(q,a) = \delta 1(q,a)$ para cada $q \in Q$ e $a \in \Sigma 1$ (continua o anterior)
- $\delta 2(q,a) = d$ para cada $q \in Q$ e $a \in (\Sigma 2 - \Sigma 1)$ do particular estado
- $\delta 2(d,a) = d$ para cada $a \in \Sigma 2$

- Exemplo: Use o Lema 3.2 para reconhecer o complemento de $L(M1) = (x \in \{1\}^* | x$ possui um nro ímpar de 1's}.
- Faça para $\Sigma 2 = \Sigma 1 = \{1\}$ e para $\Sigma 2 \supset \Sigma 1$, isto é, $\Sigma 2 = \{0...9\}$



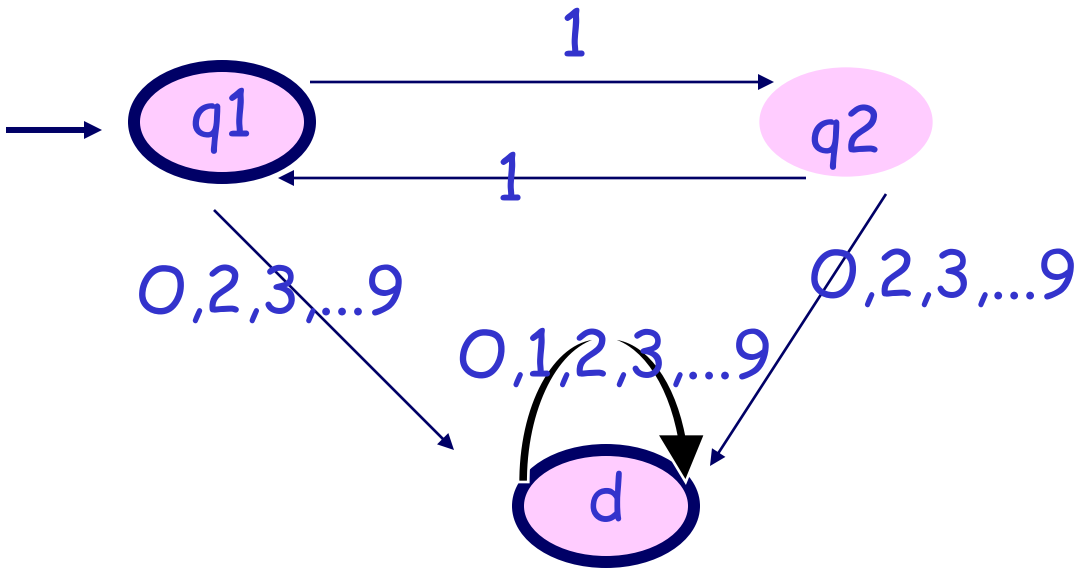
M1: reconhece ímpar



M2: Reconhece par

D é um estado inacessível que pode ser eliminado. Portanto M pode ser reduzido

$\overline{M} = ?$



Só não reconhece cadeias de 1´s de tamanho ímpar

$\overline{M}$ = ?

Teo 3.6 (H&U, 69) - Intersecção

- A classe das LR é fechada sobre a intersecção. Se L1 é LR e L2 é LR então $L1 \cap L2$ também é.

- Prova: dos Lemas 3.1 e 3.2 e da Lei de Morgan, desde que a própria intersecção usa operações de união e complemento.

$$L1 \cap L2 = \overline{\overline{L1} \cup \overline{L2}}$$

- A classe dos conjuntos aceitos por um AF forma uma Álgebra de Boole. Isto é, é uma coleção de conjuntos fechados sobre a união, complemento e intersecção.

Teo 3.8 (H&U, 69) - Concatenação

- A classe dos conjuntos aceitos por um AF é fechada sobre a concatenação. Se L1 é LR e L2 é LR, então L1.L2 é LR.
- (Prova via ER: direta)
- Prova: Seja $M1 = (Q1, \Sigma 1, \delta 1, q1, F1)$ aceitando L1 e $M2 = (Q2, \Sigma 2, \delta 2, q2, F2)$ aceitando L2.
- Assumimos Q1 e Q2 disjuntos e $\Sigma = \Sigma 1 = \Sigma 2$.
- $M3 = (Q1 \cup Q2, \Sigma, \delta 3, q1, F)$ é um AFND onde:

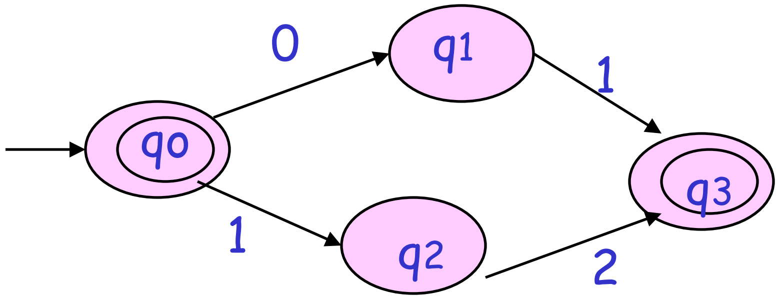
- $\delta3(q,a) = \{\delta1(q,a)\}$ para cada $q \in (Q1 - F1)$ e $a \in \Sigma$.

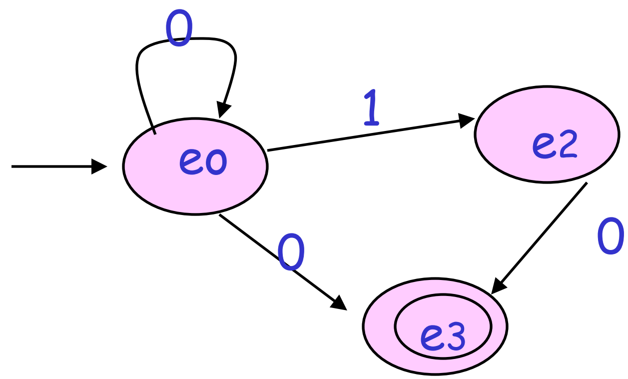
M3 age como M1 para o começo da cadeia possivelmente vazia

- $\delta3(q,a) = \{\delta1(q,a), \delta2(q2,a)\}$ para cada $q \in F1$ e $a \in \Sigma$. M3 continua em M1 ou vai para M2
- $\delta3(q,a) = \{\delta2(q,a)\}$ para cada $q \in Q2$. M3 age como M2 depois que a cadeia de entrada pertence a L2.

- Se $\lambda \notin L2$ então $F = F2$ (vai aceitar em M2)
- Se $\lambda \in L2$ então $F = F1 \cup F2$ (aceita também cadeias de L1).

Exemplo

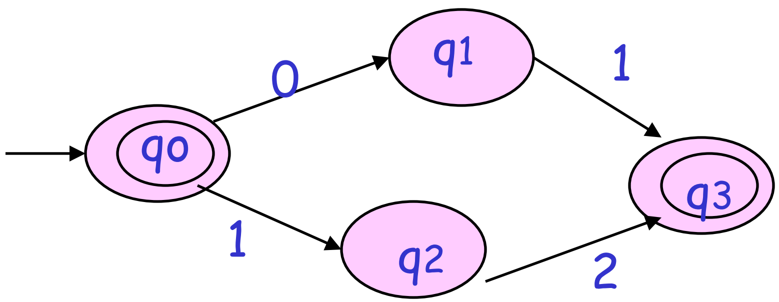


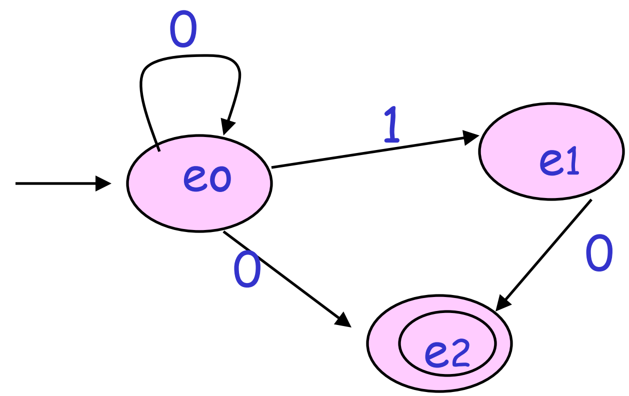


$L1=\{01,12,\lambda\}$

$L2= 0^*(10+0)$

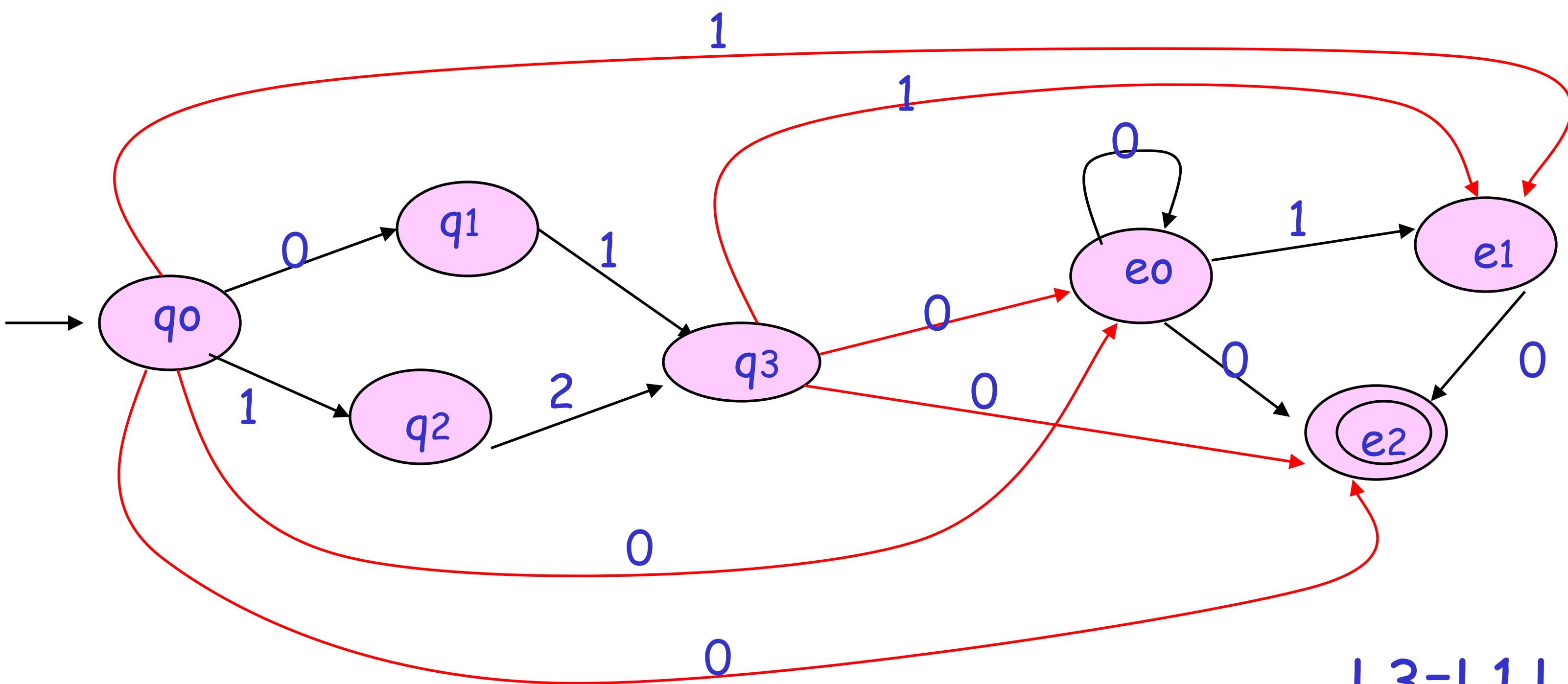
Exemplo





L1={01,12,λ}

L2= 0*(10+0)

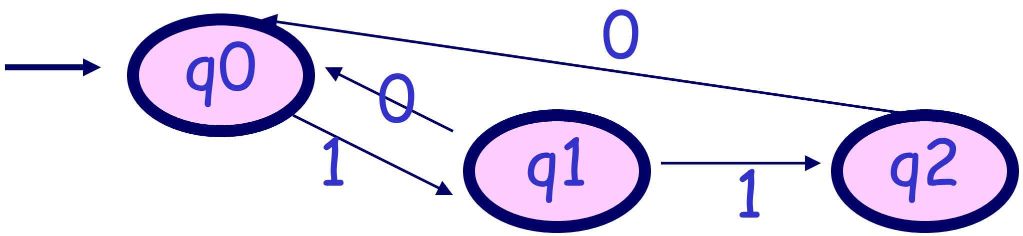


L3=L1.L2

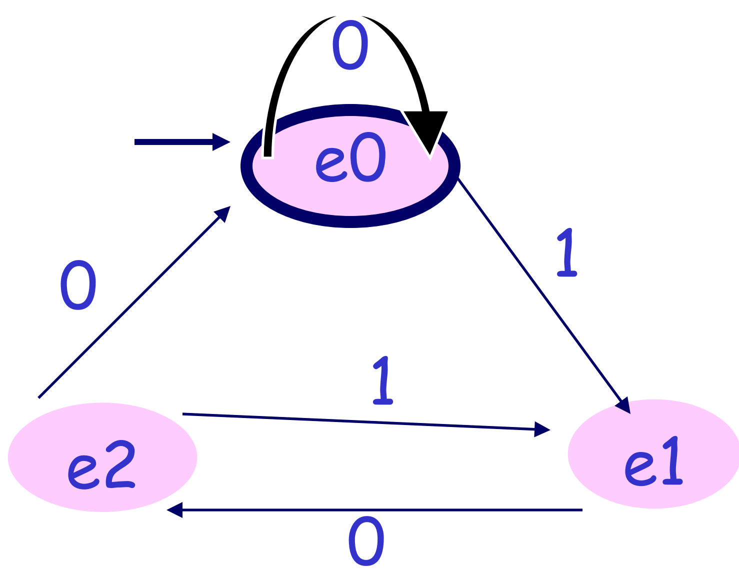
Exemplo

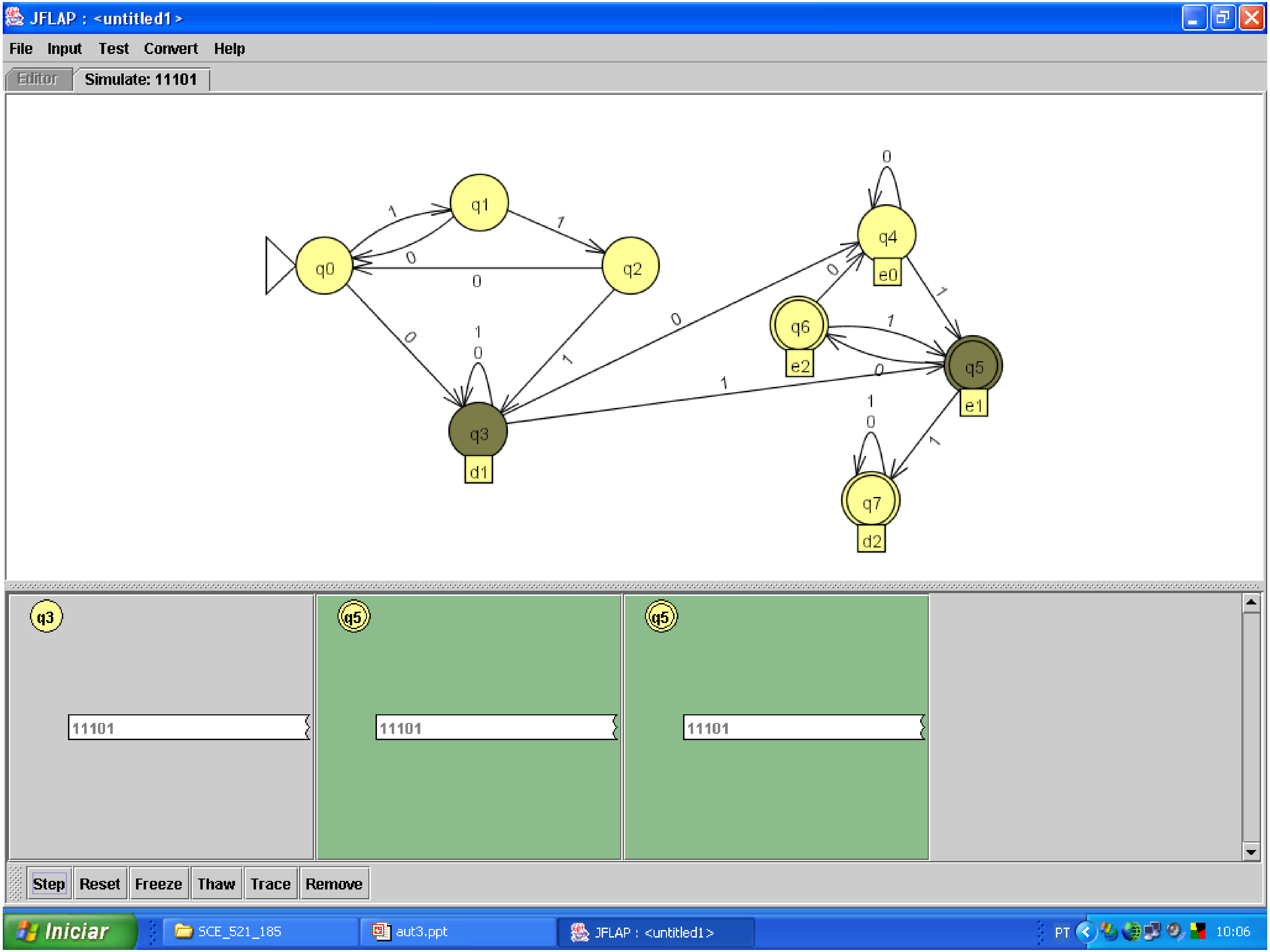
- Use o Lema 3.2 (complemento) e o Teo 3.8 (concatenação) para construir um AF M que a partir de M1 e M2 reconheça $L = \overline{L1} . \overline{L2}$

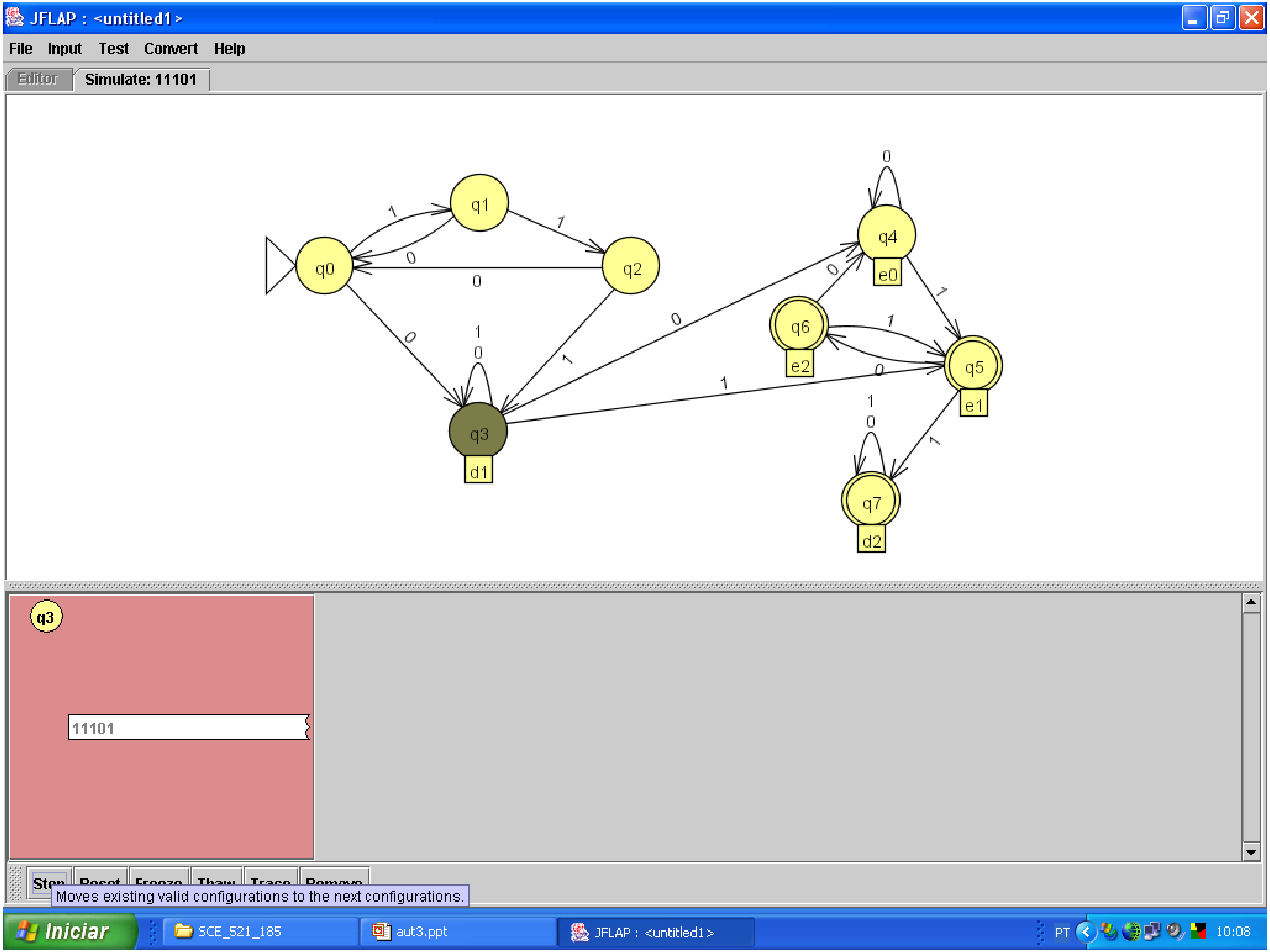
M1



M2




JFLAP : <untitled1>
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 11101
q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
e0
e1
e2
d1
d2
11101
11101
11101
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
SCE_521_185
aut3.ppt
JFLAP : <untitled1>
PT
10:06



JFLAP : <untitled1>
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 11101
q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
d1
d2
e0
e1
e2
11101
Moves existing valid configurations to the next configurations.
Iniciar
SCE_521_185
aut3.ppt
JFLAP : <untitled1>
PT
10:08

Teo 3.9 (H&U, 69) - Fechamento

- A classe dos conjuntos aceitos por um AF é fechada sobre o fechamento. Se L é LR então L* é LR.
- Prova: Seja $M = (K, \Sigma, \delta, qo, F)$ um AF que aceita L. $M' = (K \cup \{qo'\}, \Sigma, \delta', qo', F \cup \{qo'\})$ aceita L*.

qo´é também final pois $\lambda \in$ ao fecho

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \{\delta(q,a), qo)\} \text{ se } \delta(q,a) \in F \\ \{\delta(q,a)\} \text{ c.c. para } \forall\, q \in K \end{cases}$$

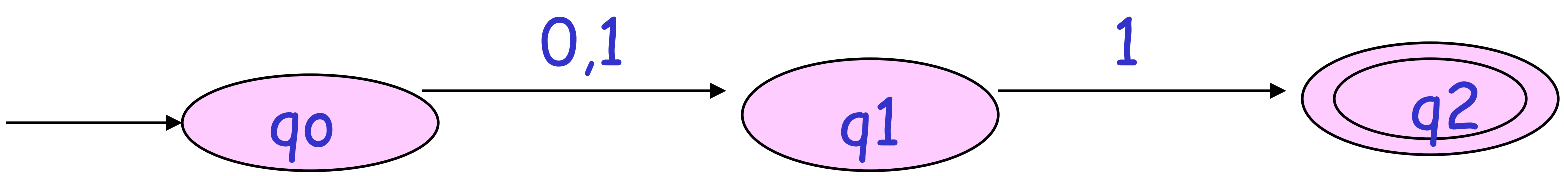
(todas as transições que estavam chegando no final, ganham uma cópia para voltar ao início)

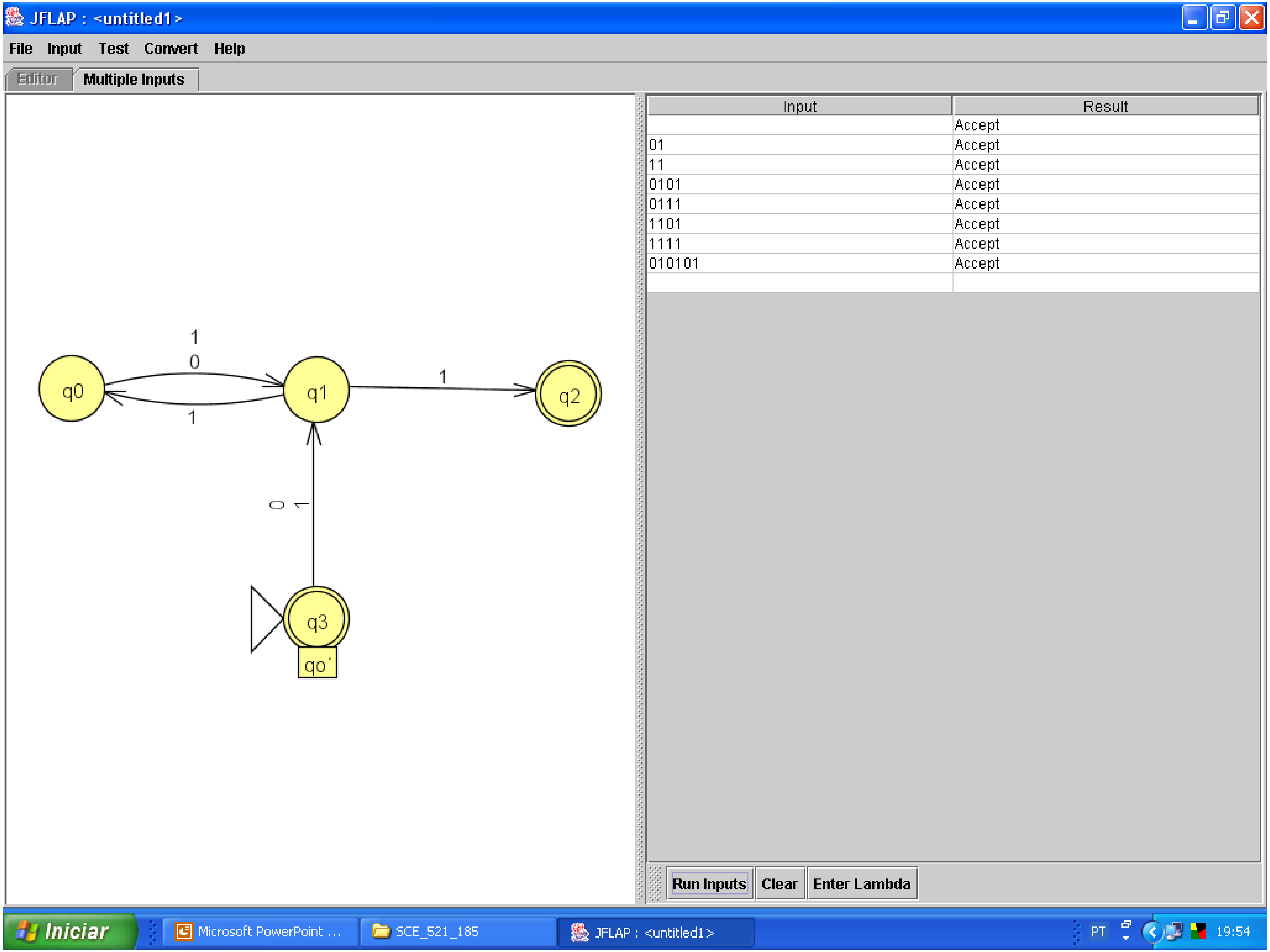
$$\delta'(qo',a) = \begin{cases} \{\delta(qo,a), qo\} \text{ se } \delta(qo,a) \in F \\ \{\delta(qo,a)\} \text{ cc} \end{cases}$$

Exemplo

- Use o Teo 3.9 para construir um AF que reconheça o fecho de L = {01,11}

- L* = {λ, 01,11,0101,0111,1101,1111, 010101, ...}




JFLAP : <untitled1>
File Input Test Convert Help
Editor
Multiple Inputs
1
0
1
1
q0
q1
q2
0 1
q3
qo´
Input
Result
Accept
01 Accept
11 Accept
0101 Accept
0111 Accept
1101 Accept
1111 Accept
010101 Accept
Run Inputs
Clear
Enter Lambda
Iniciar
Microsoft PowerPoint ...
SCE_521_185
JFLAP : <untitled1>
PT
19:54

Teo 4.10 (H,M,U,2001) Diferença

- Se L e M são linguagens regulares então L – M também são.

- Prova: $L - M = L \cap \overline{M}$. Como o complemento e a intersecção de linguagens regulares também são regulares, L – M também é.