ICMC – USP – SME0220

Introdução à Teoria das Probabilidades – 1ª prova – 2º/2016

S O L U Ç Ã O

1. Dois equipamentos (tipos A e B) são postos em funcionamento por 30 mil horas. A probabilidade de que uma falha ocorra em um equipamento do tipo A é de 1/30, do tipo B é 1/80 e em ambos, 1/1000. Qual a probabilidade de

   (a) pelo menos um dos equipamentos apresentar falha?

   (b) nenhum equipamento apresentar falha?

   (c) apenas o equipamento do tipo A falhar?

   Solução. Definimos os eventos A e B como "ocorre falha no equipamento tipo A" e "ocorre falha no equipamento tipo B", respectivamente. Segundo o enunciado, temos $\mathrm{P}(A) = 1/30$, $\mathrm{P}(B) = 1/80$ e $\mathrm{P}(A \cap B) = 1/1000$.
   (a) Pelo menos um dos equipamentos apresentar falha corresponde ao evento $A \cup B$ e $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 1/30 + 1/80 - 1/1000 = 269/6000 \cong 0,0448$.
   (b) Nenhum equipamento apresentar falha é o complementar do evento do item (a). Logo, sua probabilidade é igual a $1 - 269/6000 = 5731/6000 \cong 0,9552$.
   (c) Apenas o equipamento do tipo A falhar equivale ao evento $A \cap B^c$. Como $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ (eventos mutuamente exclusivos), temos $\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = 1/30 - 1/1000 = 97/3000 \cong 0,0323$.

2. Estudos realizados permitem concluir que o tempo de duração de um certo componente (em semanas) pode ser representado por uma variável aleatória com a seguinte distribuição:

Duração (semanas)	5	6	7	8	9	10
Probabilidade	0,1	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1

   Cada componente custa ao fabricante R$ 10,00. Se a duração do componente for inferior a 6 semanas, ele se compromete a indenizar o comprador com R$ 15,00. Qual deve ser o preço de venda de cada componente para que o fabricante obtenha um lucro médio de R$ 20,00 por componente?

   Solução. Denotamos por X a duração (em semanas) do componente. X é uma v.a. discreta com valores no conjunto $\{5, 6, \ldots, 10\}$ e probabilidades encontradas na tabela acima. O lucro L em R$ obtido com a venda depende da duração; portanto, é uma v.a. Representamos por v o preço de venda, a ser calculado. De acordo com o enunciado e levando em conta o custo de aquisição (R$ 10,00) e a indenização (R$ 15,00), temos

$$L(X) = \begin{cases} (v - 10) - 15, & \text{se } X < 6, \text{ (pagamento de indenização)} \\ v - 10, & \text{se } X \geq 6. \end{cases}$$

   Desta forma, $\mathrm{E}[L(X)] = (v - 25)\,\mathrm{P}(X < 6) + (v - 10)\,\mathrm{P}(X \geq 6)$, que deve ser igual a R$ 20,00. Como $\mathrm{P}(X < 6) = 0,1$ e $\mathrm{P}(X \geq 6) = 0,9$, obtemos $20 = \mathrm{E}[L(X)] = 0,1\,(v - 25) + 0,9\,(v - 10) = v - 11,5$, de maneira que o preço de venda de cada componente deve ser R$ 31,50.

3. Uma empresa aplica um teste a 100 de seus vendedores, 80 e 20 dos quais são considerados bons e maus vendedores, respectivamente. Dados históricos da empresa indicam que 60% dos bons vendedores e que 30% dos maus vendedores são aprovados no teste. Se um candidato a trabalhar na empresa for aprovado no teste, qual a probabilidade de que seja um bom vendedor?

   Solução. Os eventos "um vendedor é bom" e "ocorre aprovação no teste" são denotados por A e B, respectivamente. Pelo enunciado, $\mathrm{P}(A) = 80/100 = 0,80$. Logo, $\mathrm{P}(A^c) = 0,20$. Ainda pelo enunciado, $\mathrm{P}(B|A) = 0,6$ e $\mathrm{P}(B|A^c) = 0,3$. Deve ser calculada $\mathrm{P}(A|B)$. Aplicando a fórmula de Bayes obtemos

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\mathrm{P}(A^c)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,6 \times 0,8 + 0,3 \times 0,2} = \frac{8}{9} \cong 0,8889.$$

4. Considere $F(x) = 3x^2 - 2x^3$, se $0 < x < 1$; $F(x) = 0$, se $x \leq 0$ e $F(x) = 1$, se $x \geq 1$. Esta função é a função distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua X?
   Se a sua resposta for afirmativa, determine a função densidade de probabilidade de X.

   Solução. Pelo enunciado, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. A função $3x^2 - 2x^3 = x^2(3 - 2x)$ é contínua para $x \in (0,1)$, tomando valores 0 e 1, respectivamente, para $x = 0$ e $x = 1$, que coincidem com $F(0)$ e $F(1)$. Assim, $F(x)$ é contínua para $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $x^2(3 - 2x) \in (0,1)$ para $x \in (0,1)$; logo, $F(x) \in [0,1]$ para $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in (0,1)$, calculamos $dF(x)/dx = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$, de modo que $dF(x)/dx > 0$. Combinando estes resultados, concluímos que $F(x)$ é a f.d.a. de uma variável aleatória. A f.d.p. correspondente é dada por $f(x) = dF(x)/dx = 6x(1-x)$ para $x \in (0,1)$ e $f(x) = 0$, caso contrário.

5. A probabilidade de que a porta de uma casa esteja trancada a chave é igual a 3/5. Sabe-se que de 25 chaves em uma caixa, três abrem esta porta. Uma pessoa que pretende entrar na casa pode escolher ao acaso somente uma chave desta caixa. Qual a probabilidade de que esta pessoa entre na casa?

   Solução. Os eventos "a porta está trancada" e "a pessoa entra na casa" são denotados por A e B, respectivamente. Pelo enunciado, $\mathrm{P}(A) = 3/5$. Logo, $\mathrm{P}(A^c) = 2/5$, notando que A^c representa a porta aberta e, portanto, $\mathrm{P}(B|A^c) = 1$. Ainda pelo enunciado, $\mathrm{P}(B|A) = 3/25$. Aplicando a fórmula da probabilidade total obtemos

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\mathrm{P}(A^c) = \frac{3}{25} \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{2}{5} = \frac{59}{125} = 0,472.$$