

Localização II

Filtro de Kalman

1

Filtro de Kalman

- Uma das primeiras implementações práticas do filtro de Bayes (1960).
- Hipóteses para utilização do filtro:
 - Erro médio de cada variável igual a zero;
 - Erro de cada variável independente;
 - Modelo linear de evolução do sistema;
 - Relacionamento linear entre variáveis de estado e variáveis medidas.
- Se as hipóteses acima não forem cumpridas, a optimalidade não é assegurada.

2

Filtro de Kalman

- Estima o estado x de um processo controlado em tempo discreto que é governado por uma equação estocástica

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

- Com medição

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

3

Componentes do filtro de Kalman

- A_t Matriz (nxn) que descreve a evolução do estado de t a $t-1$ sem ações de controle ou ruído.
- B_t Matriz (nxl) que descreve como as ações de controle u_t mudam o estado de $t-1$ para t .
- C_t Matriz (kxn) que mapeia o estado x_t em uma observação z_t .
- ε_t Variáveis aleatórias que representam os ruídos de processo e de medição, assumidos independentes e com distribuição normal com covariância R_t e Q_t respectivamente.
- δ_t

4

Filtro de Kalman: dinâmica

- A dinâmica do sistema é uma função linear do estado e das ações de controle, mais o ruído do sistema:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$p(x_t | u_t, x_{t-1}) = N(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t)$$

$$\begin{aligned} \overline{bel}(x_t) &= \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) \overline{bel}(x_{t-1}) dx_{t-1} \\ &\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ &\sim N(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t) \quad \sim N(x_{t-1}; \overline{\mu}_{t-1}, \overline{\Sigma}_{t-1}) \end{aligned}$$

Filtro de Kalman: observações

- As observações são funções lineares do estado, mais o ruído associado:

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

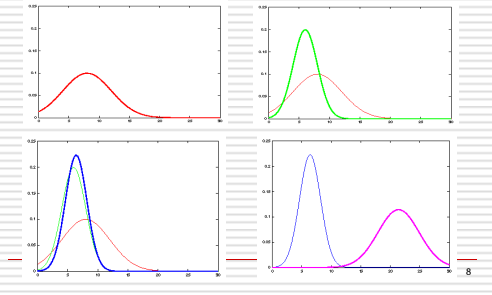
$$p(z_t | x_t) = N(z_t; C_t x_t, Q_t)$$

$$\begin{aligned} \overline{bel}(x_t) &= \eta \int p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t) \\ &\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ &\sim N(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t) \end{aligned}$$

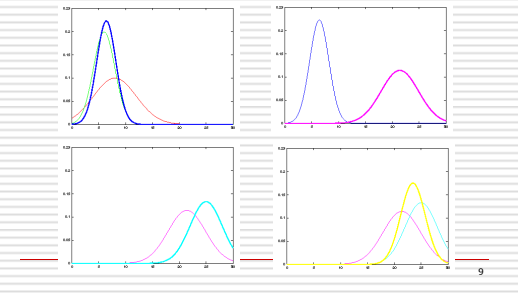
Filtro de Kalman

1. Algoritmo **Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):
2. **Predição:**
3. $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
4. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$
5. **Correção:**
6. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
8. $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$
9. **Return** μ_t, Σ_t

Ciclo correção-predição

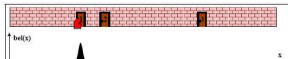


Ciclo correção-predição

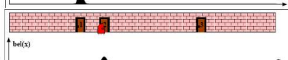


Ciclo correção-predição

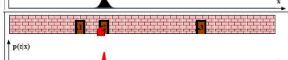
Estimação do estado inicial



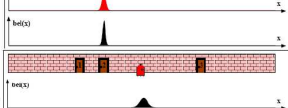
Predição: associação à ação de controle



Atualização: incorporação da medição



Predição: associação à ação de controle



Filtro de Kalman na robótica

- Altamente Eficiente: complexidade polinomial com as dimensões de medição k e de estado n : $O(k^{2.376} + n^2)$
- Ótimo para sistemas lineares Gaussianos
- Maioria dos sistemas robóticos é não-linear!

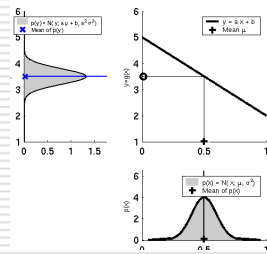
Não linearidade

- A maioria dos problemas de robótica envolve funções não-lineares!

$$x_t = g(u_t, x_{t-1})$$

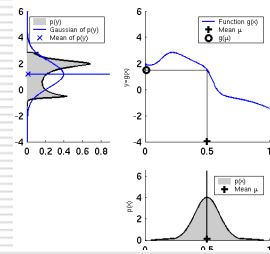
$$z_t = h(x_t)$$

Não linearidade



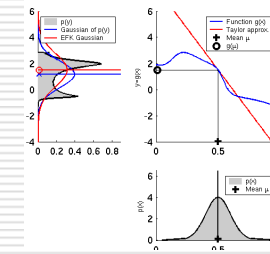
13

Não linearidade



14

Não linearidade



15

Linearização do KF: Série de Taylor – primeira ordem

□ Predição:

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

□ Correção:

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \bar{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t (x_t - \bar{\mu}_t)$$

16

Algoritmo: filtro de Kalman estendido

1. Extended_Kalman_filter($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):

2. Prediction:

$$\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$$

$$\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$$

3. Correction:

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))$$

$$\Sigma_t = (\bar{I} - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$$

4. Return μ_t, Σ_t

$$\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$$

$$\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$$

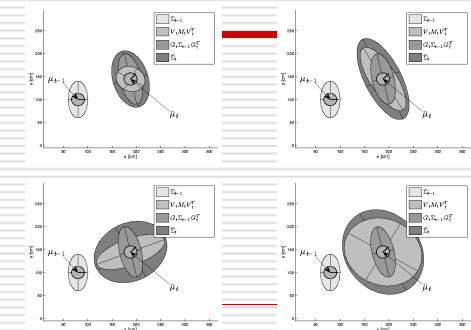
$$\Sigma_t = (\bar{I} - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$$

$$H_t = \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t}$$

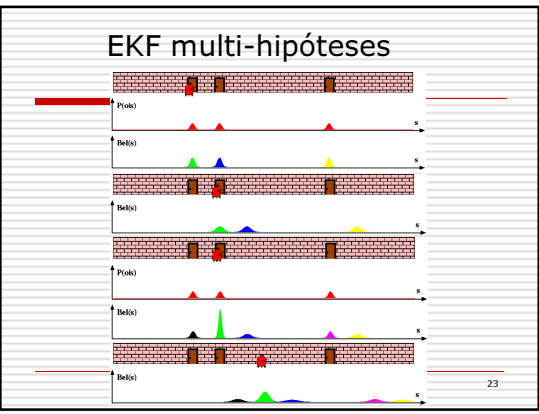
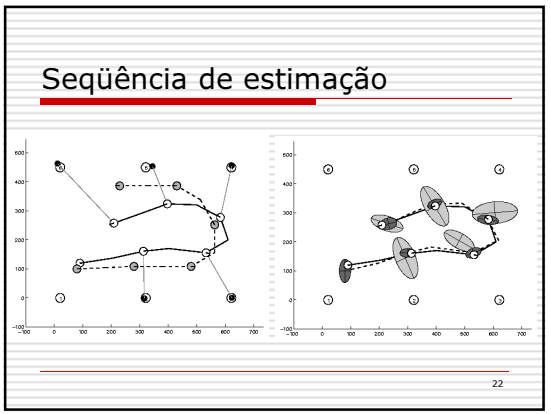
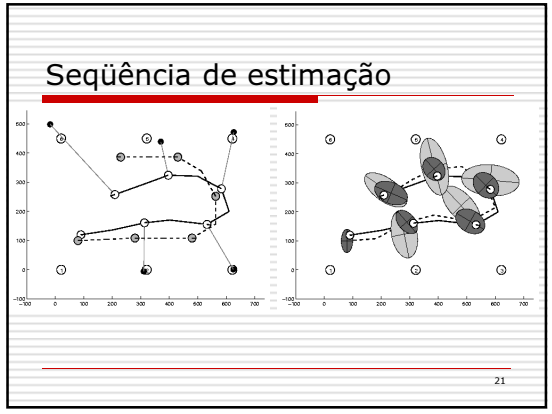
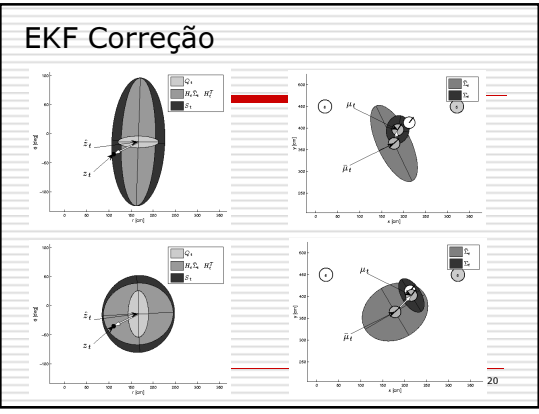
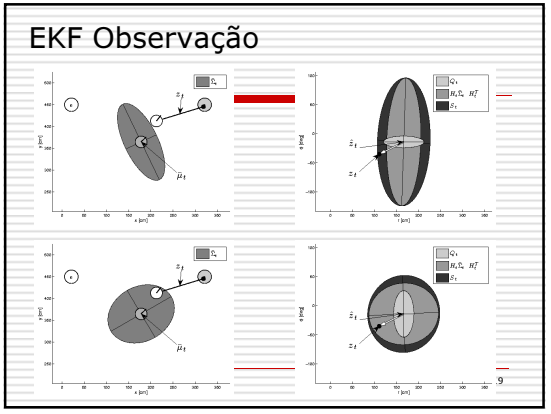
$$G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

17

EKF Predição



18



Filtro de Kalman estendido na robótica

- **Altamente Eficiente:** complexidade polinomial com as dimensões de medição k e de estado n : $O(k^{2.376} + n^2)$
- **Não é ótimo.**
- Pode divergir se a não-linearidade **for forte!**
- Funciona **surpreendentemente bem**, mesmo quando as **suposições básicas são violadas!**

Localização – resumo

| | EKF | MHT | Coarse (topological) grid | fine (metric) grid | MCL |
|------------------------|-----------|----------------------|---------------------------|--------------------|------------------|
| Measurements | landmarks | landmarks | landmarks | raw measurements | raw measurements |
| Measurement noise | Gaussian | Gaussian | any | any | any |
| Posterior | Gaussian | mixture of Gaussians | histogram | histogram | particles |
| Efficiency (memory) | ++ | ++ | + | - | + |
| Efficiency (time) | ++ | + | + | - | + |
| Ease of implementation | + | - | + | - | ++ |
| Resolution | ++ | ++ | - | + | + |
| Robustness | - | + | + | ++ | ++ |
| Global localization | no | no | yes | yes | yes |