$3^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE I - SME0800

Professora Juliana Cobre

Exercício 1 (*Magalhães E. 6 p. 140*)**.** Seja $Y \sim Poisson(\lambda)$ e $X|Y = y \sim B(n, p)$.

(a) Calcule a função de probabilidade de X.

(b) Determine a função de probabilidade condicional de Y dado $X = x$.

Exercício 2 (*Meyer E. 6.1 p. 134*)**.** Suponha que a tabela seguinte represente a distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Calcule todas as distribuições marginais e condicionais.

$Y \mid X$	1	2	3
1	1/12	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/18	1/4	2/15

Exercício 3 (*Magalhães e Lima E. 3 p. 152*)**.** Uma amostra de 220 clientes de uma clínica dentária foi selecionada. As variáveis tempo, em anos, decorridos desde a última visita ao dentista, V, e o número de cáries encontradas, C, é apresentado na próxima tabela. Obtenha as tabelas marginais de frequência.

$V \mid C$	0	1	2
1	18	16	10
2	34	45	38
3	12	16	31

Exercício 4 (*Magalhães e Lima E. 4 p. 153*)**.** A função de probabilidade conjunta entre as variáveis aleatórias X e Y é apresentada na próxima tabela.

$X \mid Y$	-2	0	2	4
-1	0,1	0,2	0,1	0,2
1	0,2	0	0,1	0,1

(a) Obtenha as funções de probabilidade marginais das variáveis.

(b) X e Y são independentes?

(c) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

Exercício 5 (*Magalhães e Lima E. 5 p. 153*)**.** Na caixa I existem duas bolas numeradas 0 e 1, enquanto que a caixa II contém duas bolas numeradas -1 e 0. Uma bola é retirada aleatoriamente de cada caixa, de forma independente uma da outra. A esse experimento, associamos as variáveis aleatórias: X: número da bola retirada na caixa I, Y: soma dos valores das duas bolas retiradas, e Z: diferença, em módulo, desses valores.

(a) Determine a função de probabilidade conjunta entre X e Y e entre Y e Z.

(b) Verifique X e Y são independentes. Idem para Y e Z.

(c) Calcule a covariância entre X e Y.

(d) Obtenha $\text{Var}(X + Y)$.

Exercício 6 (*Magalhães e Lima E. 6 p. 153*)**.** A variável aleatória X é Bernoulli com $p = 0,4$ e Y é Binomial com $p = 0,5$ e $n = 3$. Admita que X e Y são independentes.

(a) Determine $P(X = 0|Y = 2)$.

(b))Obtenha a funão de probabilidade conjunta de X e Y e do produto XY.

(c) Calcule $\text{E}(X), \text{E}(Y)$ e $\text{E}(XY)$ e verifique que $\text{E}(X)\text{E}(Y) = \text{E}(XY)$.

(d) Determine o valor de $\text{Cov}(X, Y)$ e de $\rho_{X,Y}$

Exercício 7 (*Magalhães e Lima E. 14 p. 158*)**.** Para o lançamento de dois dados equilibrados, defina duas variáveis aleatórias. Seja X o número de vezes que aparece a face 2 e Y igual a 0 se a soma for par e 1, caso contrário.

(a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.

(b) Calcule $\text{E}(X), \text{E}(Y)$ e $\text{E}(X + Y)$.

(c) Verifique se X e Y são independentes.

(d) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

Exercício 8 (*Magalhães e Lima E. 19 p. 159*)**.** Considere a frase: "Para mais saúde pratique mais esporte". Escolha ao acaso uma palavra dessa frase e considere as variáveis aleatórias V: número de vogais e C: número de consoantes.

(a) Determine a conjunta de V e C.

(b) Obtenha as funções de probabilidade marginais.

(c) Calcule os valores esperados dessas variáveis. As variáveis são independentes? Justifique. Se a escolha acima resultou em $V = 2$, qual é a probabilidade da palavra "mais"ter sido escolhida?

Exercício 9 (*Magalhães e Lima E. 23 p. 160*)**.** Sejam $X \sim Bin(5; 0,5)$ e $Y \sim Bin(3; 0,2)$ independentes. Determine o valor esperado e a variância da variável $2X - 3Y$.

Exercício 10 (*Magalhães e Lima E. 29 p. 162*)**.** Sejam $U = Y^2$ e $V = X + Y$, com função de probabilidade conjunta entre X e Y dada na tabela a seguir:

$X \mid Y$	0	1	2
-1	1/12	1/6	1/3
1	1/6	1/4	0

(a) Obtenha a cojunta U e V.

(b) Calcule $P(U = 4|V = 1)$.

(c) Determine $\text{Cov}(U, V)$.

Exercício 11 (*Magalhães e Lima E. 30 p. 162*)**.** Considere duas variáveis aleatórias discretas A e B. Admita que A assume somente valores a_1, a_2, e a_3, enquanto B os valores b_1 e b_2. Sabemos que:

$$P(A = a_1) = 0,2;\ P(A = a_3) = 0,5;\ P(B = b_1) = 0,6;$$

$$P(A = a_1, B = b_1) = 0,12;\ \text{ e } P(B = b_2|A = a_3) = 0,5.$$

(a) Construa a tabela de dupla entrada entre A e B.

(b) As variáveis são independentes? Justifique.

(c) Calcule $P(A = a_2|B = b_1)$.