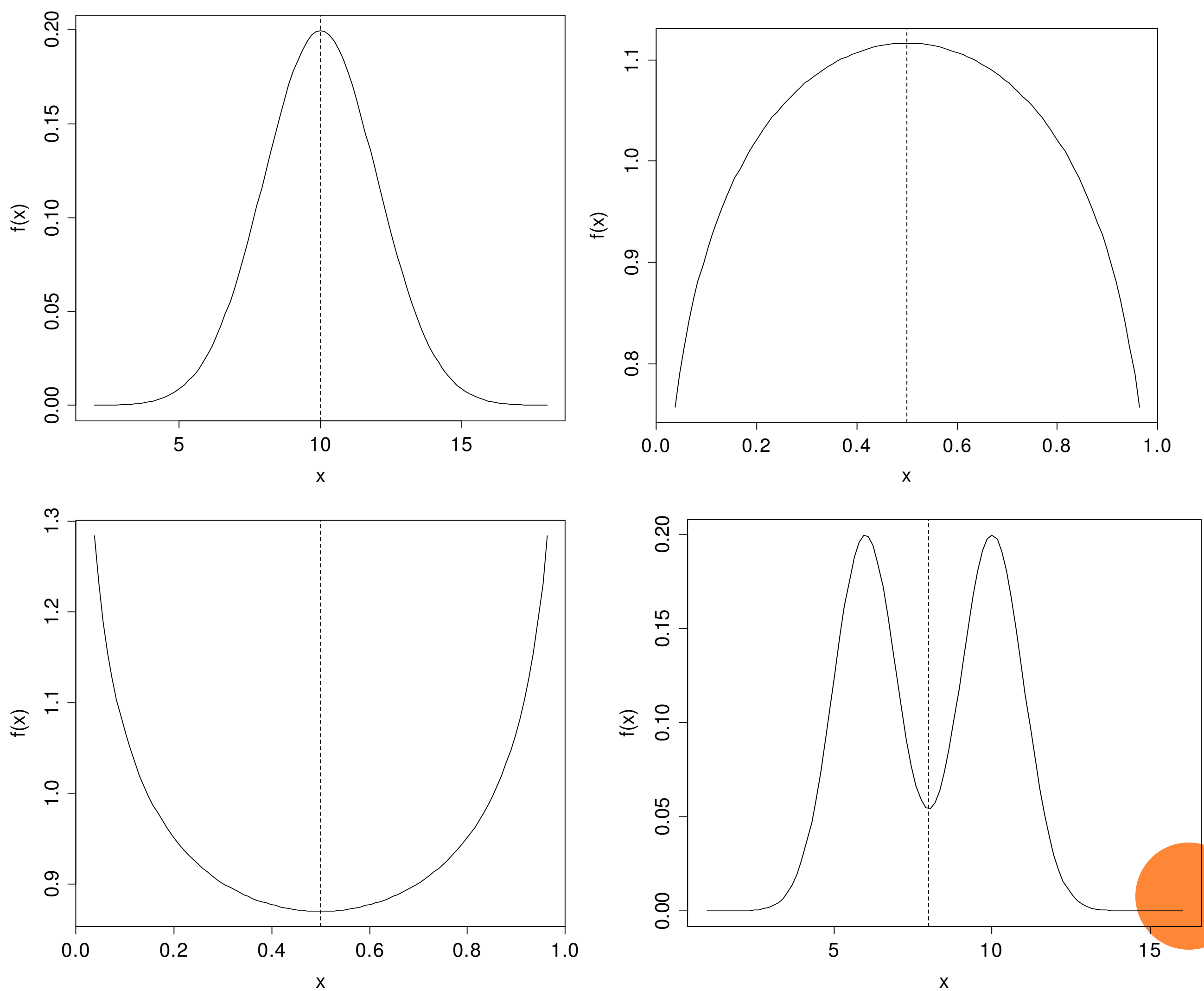
6. Medidas de assimetria e curtose

2012

6.1. Medidas de assimetria

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição simétrica (*symmetric*) em relação a um valor x_0 se $f(x_0 - a) = f(x_0 + a)$, para todo a.

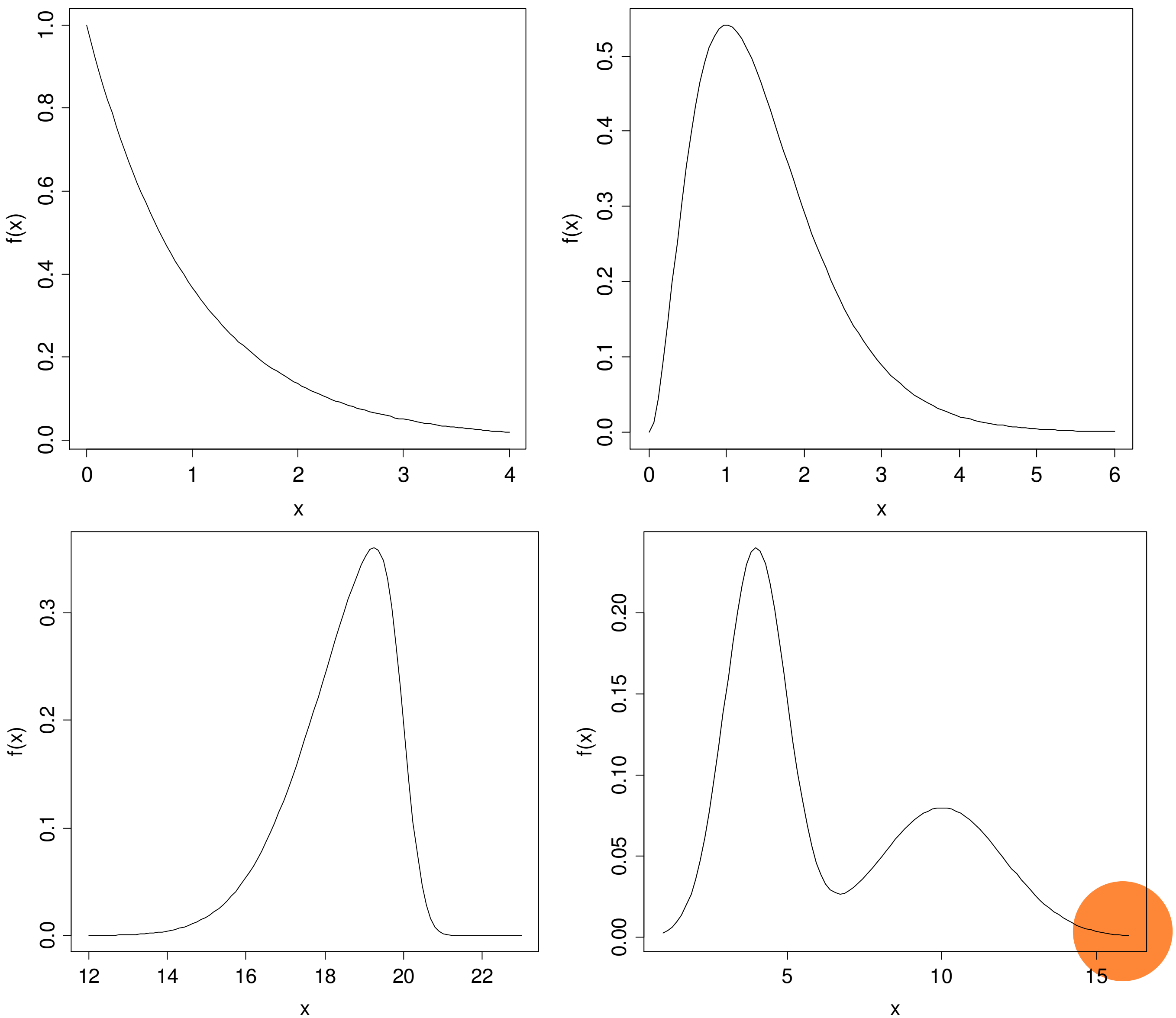
Distribuições simétricas:



Obs. $M = x_0$.

Moda e média não necessariamente são iguais a x_0.

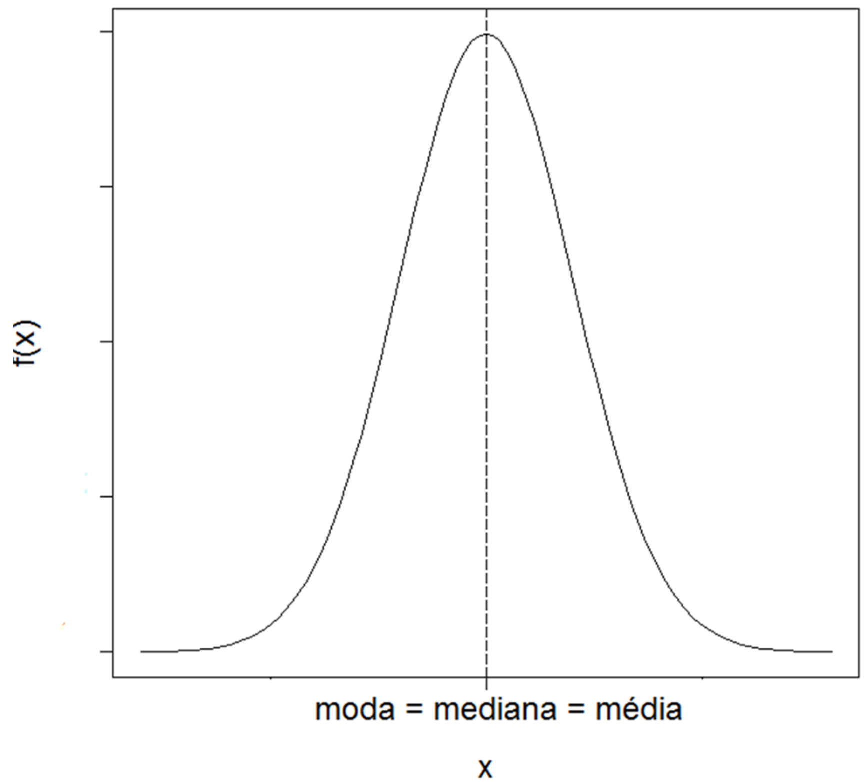
Distribuições assimétricas:

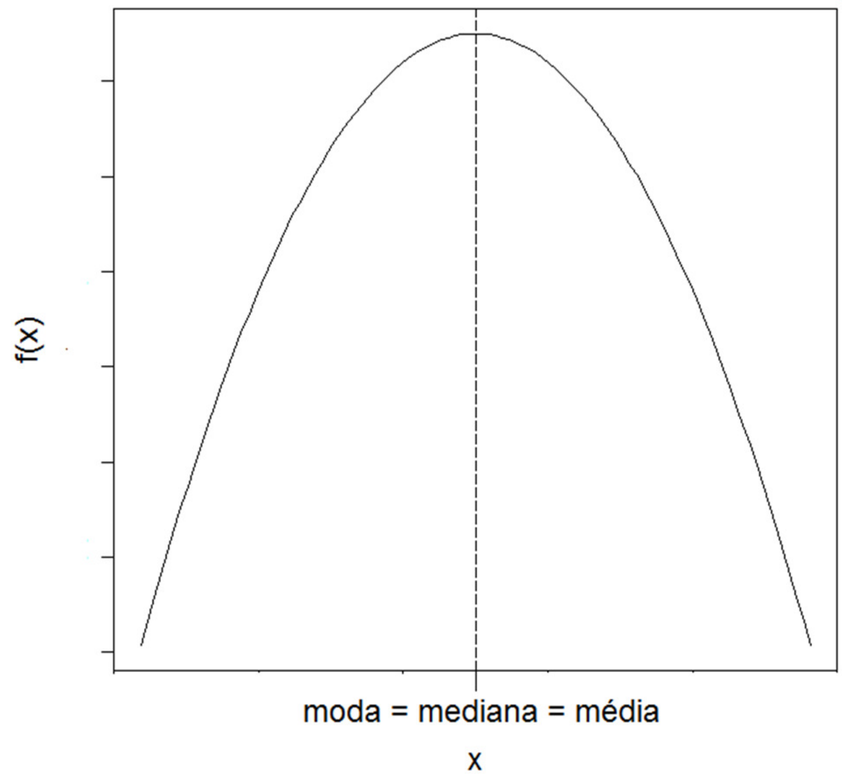


Relação entre moda, mediana e média

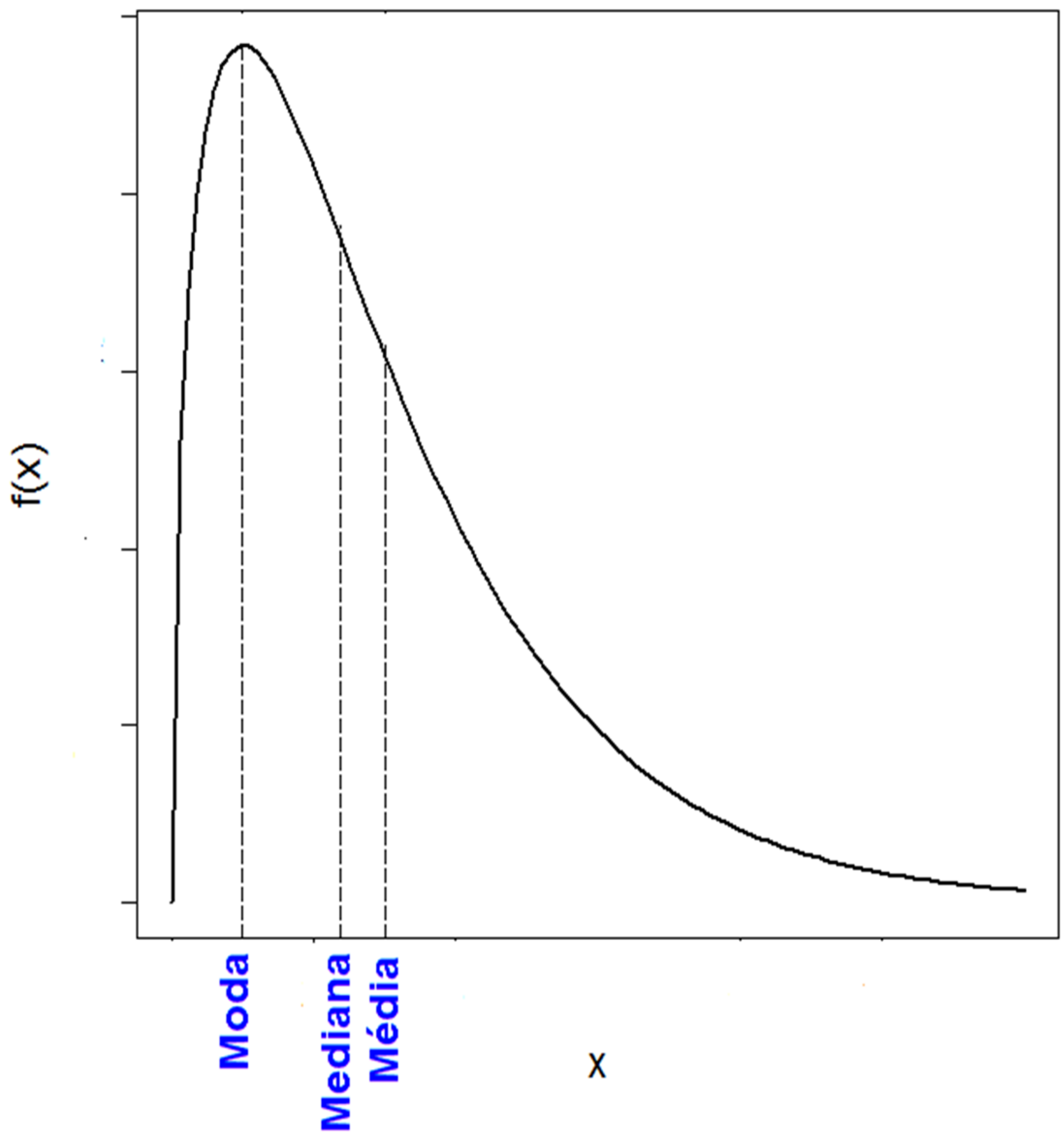
Supomos que a distribuição é unimodal e que a média existe.

Distribuição simétrica: moda = mediana = média.





Relação entre moda, mediana e média

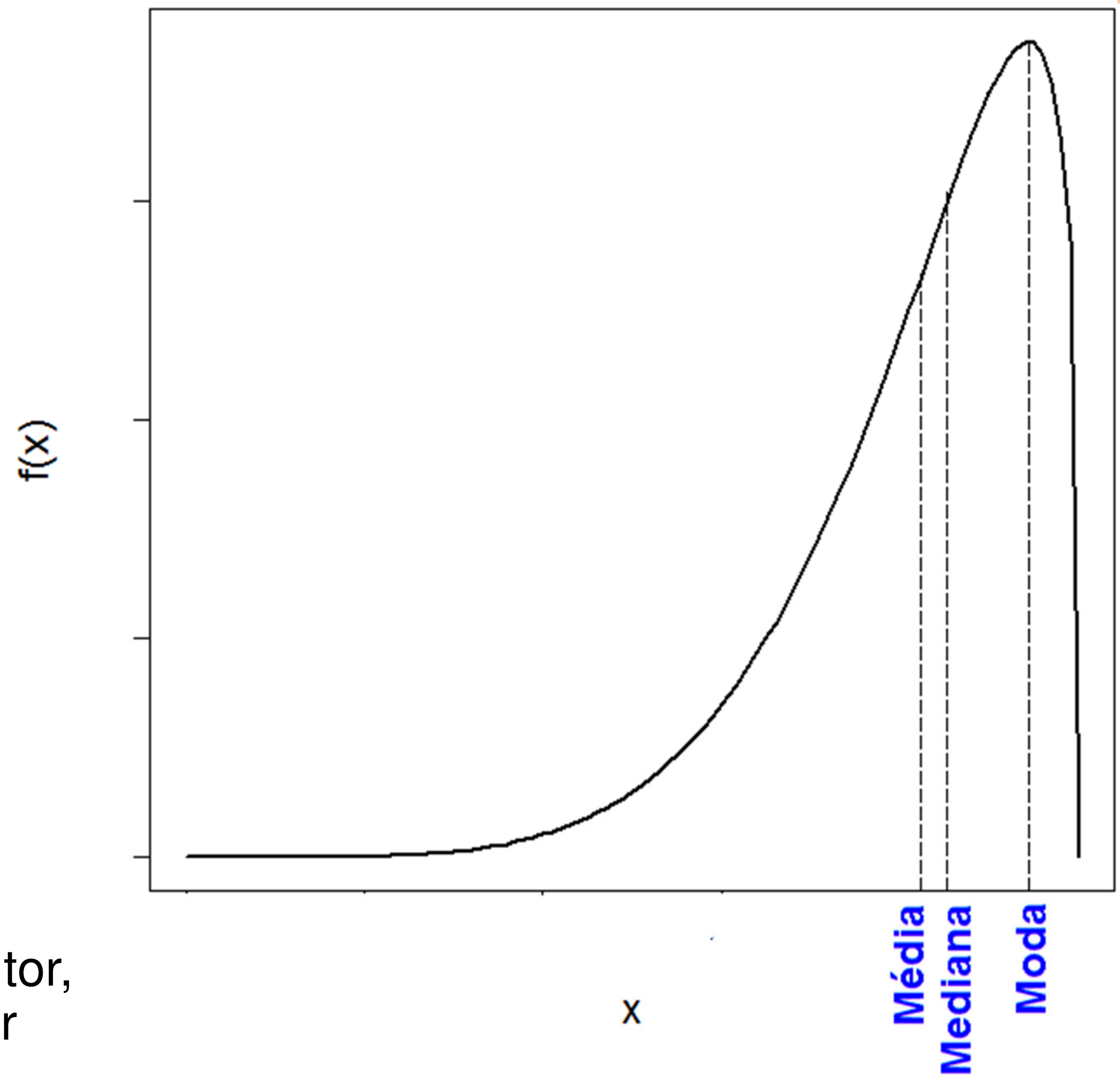


Distribuição assimétrica à direita ou assimétrica positiva (*right skewed* ou *positive skewed*): média > mediana > moda.

Cauda direita (*right tail*) é mais longa.

Relação entre moda, mediana e média

Distribuição assimétrica à esquerda ou assimétrica negativa (*left skewed* ou *negative skewed*): média < mediana < moda.



Cauda esquerda (*left tail*) é mais longa.

Obs. Dependendo do autor, há troca de esquerda por direita.

Um conjunto de dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é simétrico em relação a x_0 se para todo x_j existe x_k tal que $x_j - x_0 = -(x_k - x_0)$, $j \neq k$.

Desta forma,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0) = 0. \quad \text{Logo, } x_0 = \bar{x}.$$

Pela simetria, $M = x_0$.

Exemplo. (24, 26, 26, 32, 40, 60, 68, 74, 74, 76) é simétrico em relação a $x_0 = 50$.

Medidas de assimetria. Quantificação da falta de simetria de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

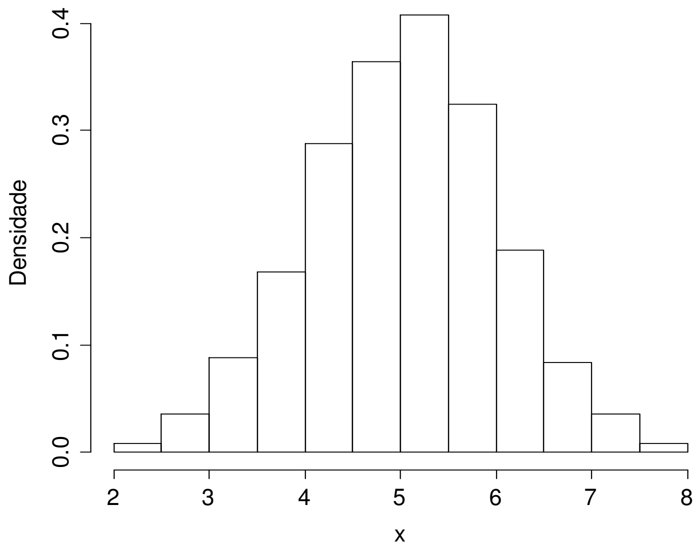
Redução (drástica) de n observações a um só valor.

Assume valores reais. Medida = 0: indicativo de simetria.

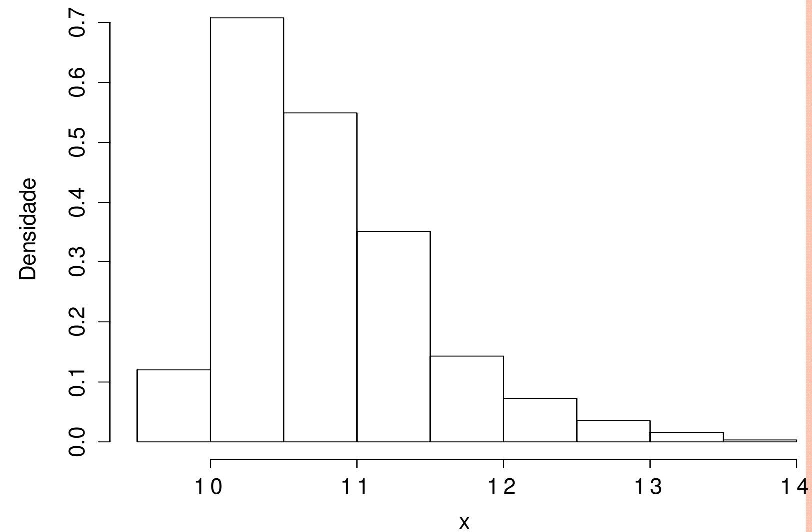
Obs. Dados obtidos de uma variável aleatória X simétrica não necessariamente são simétricos.

Assimetria em conjuntos de dados

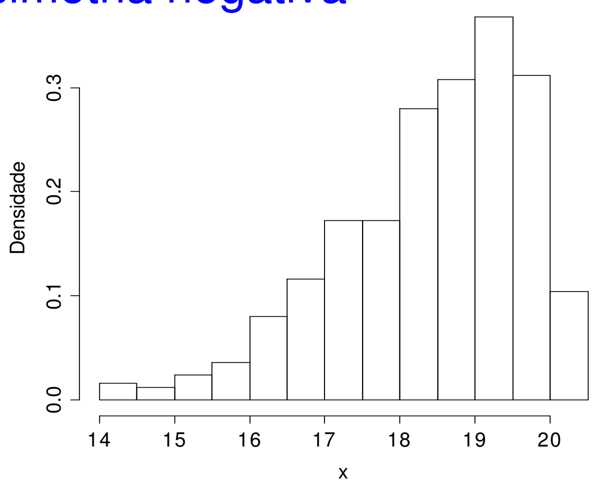
Aproximadamente simétrico

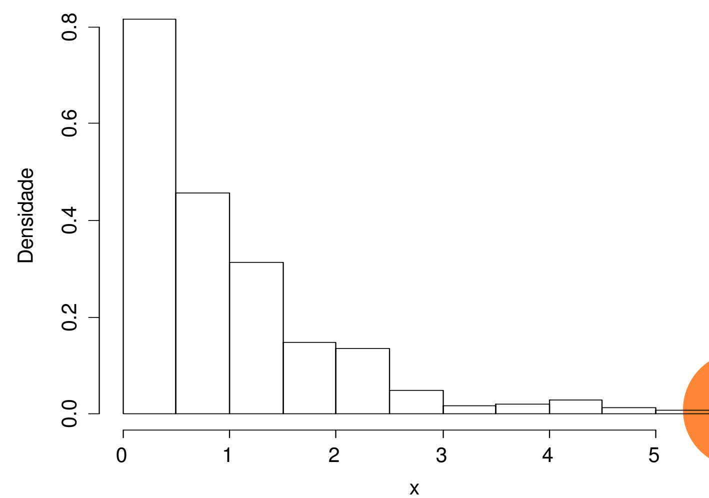


Assimetria positiva



Assimetria negativa





6.1.1. Medida de assimetria de Pearson

Utiliza a relação entre moda, mediana e média em distribuições unimodais.

$$g = \frac{\bar{x} - \mathrm{Mo}}{\mathrm{s}}.$$

Requer o cálculo da moda (Mo). É adimensional.

Momentos. Dados: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Momento de ordem k em relação à origem ou momento não central (*raw* ou *crude moment*):

$$m_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 0,1,2,\ldots, \text{ sendo que } m_0^* = 1 \text{ e } m_1^* = \bar{x}$$

Momento central de ordem k (*central moment*):

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k, \quad k = 0,1,2,\ldots, \text{ sendo que } m_0 = 1 \text{ e } m_1 = 0.$$

Obs. $m_2 = (n - 1)\, s^2 / n$.

Relação entre os momentos:

$$m_2 = m_2^* - \bar{x}^2, \qquad m_2^* = m_2 + \bar{x}^2,$$

$$m_3 = m_3^* - 3m_2^*\bar{x} + 2\bar{x}^3 \quad \text{e} \qquad m_3^* = m_3 + 3m_2\bar{x} + \bar{x}^3 \quad \text{e}$$

$$m_4 = m_4^* - 4m_3^*\bar{x} + 6m_2^*\bar{x}^2 - 3\bar{x}^4. \qquad m_4^* = m_4 + 4m_3\bar{x} + 6m_2\bar{x}^2 + \bar{x}^4.$$

Se uma variável aleatória X tem distribuição simétrica, seus momentos centrais de ordem k ímpar, se existirem, são todos nulos:

$E[(X - \mu)]^k = 0$, sendo que $\mu = E(X)$.

Sendo assim, podemos utilizar o 3º momento central para propor uma medida de assimetria.

Obs. $E[(X - \mu)]^3 = 0$ não implica que a distribuição de X é simétrica.

6.1.2. Assimetria (*skewness*)

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{3/2}}.$$

Propriedades. (1) g_1 é adimensional e (2) g_1 é um número real.

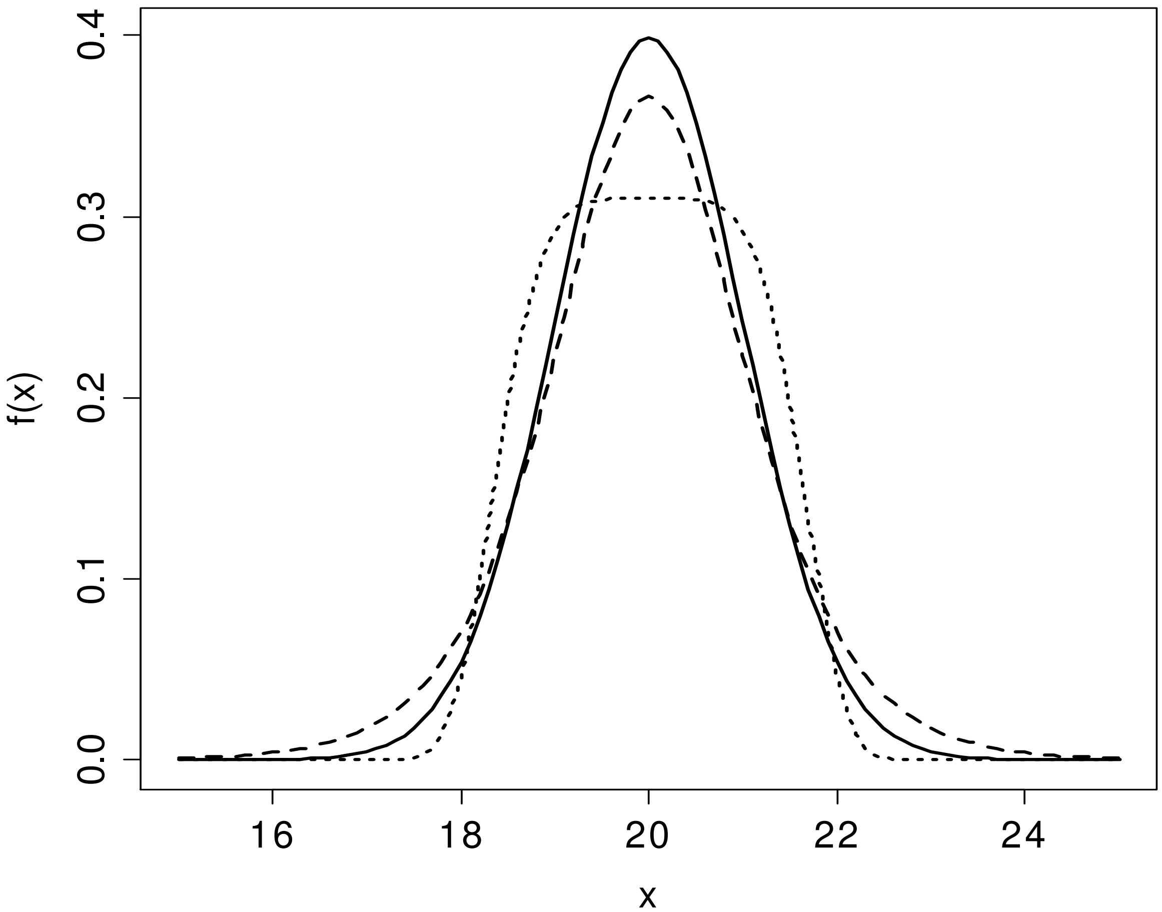
6.2. Medidas de curtose

Em distribuições unimodais, a curtose (*kurtosis*) está associada ao achatamento da distribuição.

Característica do "pico" da distribuição (*degree of peakedness*).

No caso de uma variável aleatória contínua unimodal, a curtose diz respeito à forma de f(x) em torno de sua moda (que pode coincidir com a média e a mediana).

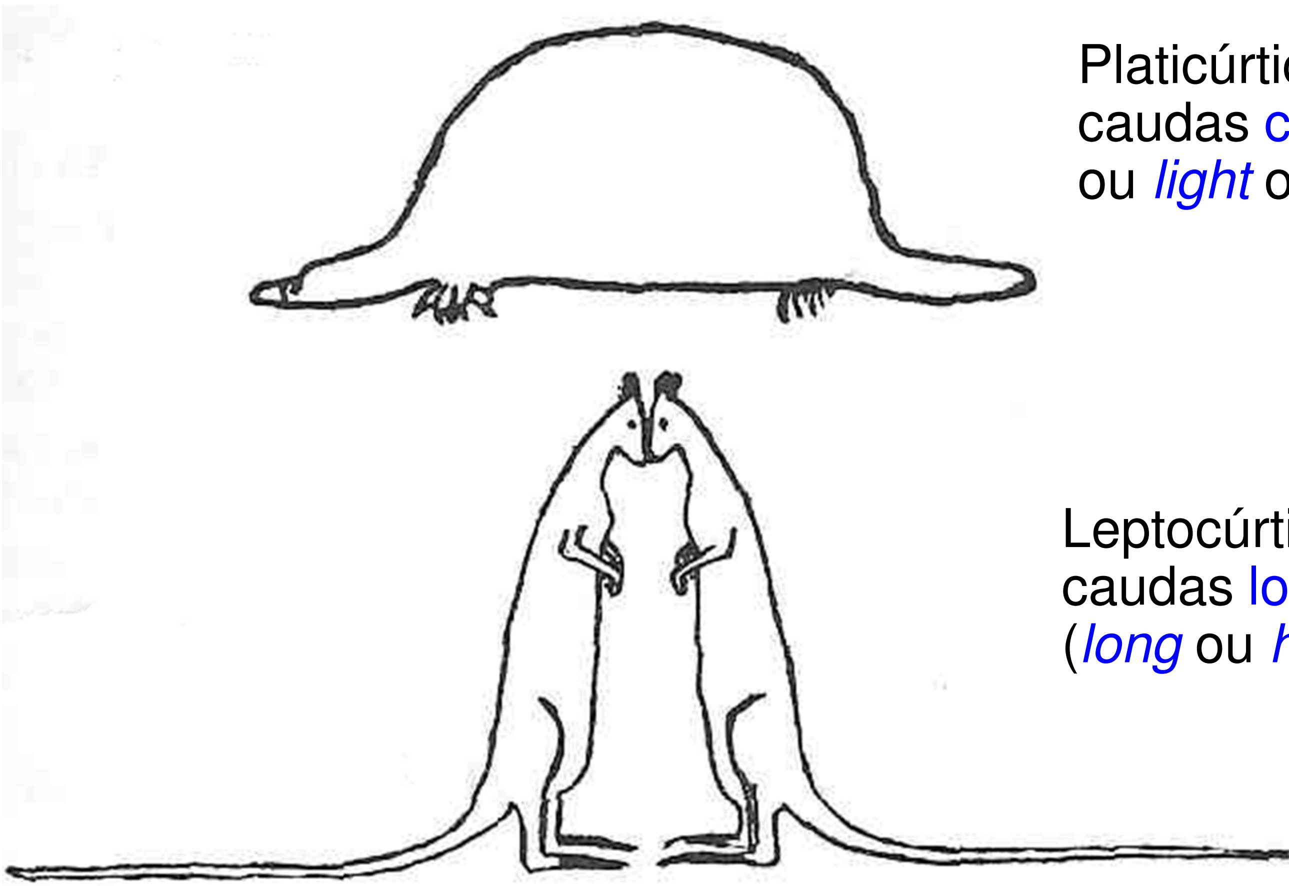
Distribuições simétricas com médias e variâncias iguais:



Diferenças quanto ao afastamento em relação à média, mas que não são captadas pela variância.

Este fato sugere utilizarmos o 4º momento central para quantificar estas diferenças.

Distribuições platicúrticas, mesocúrticas e leptocúrticas



Platicúrtica (*platykurtic*): caudas curtas ou leves (*short* ou *light* ou *thin*).

Leptocúrtica (*leptokurtic*): caudas longas ou pesadas (*long* ou *heavy* ou *thick* ou *fat*).

Fonte. Bulmer, M. G. (1979), *Principles of Statistics*, Dover: New York.

Mesocúrtica (*mesokurtic*): caudas neutras (nem curtas e nem longas).

Curtose (*kurtosis*)

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^2}.$$

Propriedades. (1) g_2 é adimensional e (2) $g_2 > 0$.

Obs. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $E[(X - \mu)^4] / \{E[(X - \mu)^2]\}^2 = E[(X - \mu)^4] / \sigma^4 = 3$.

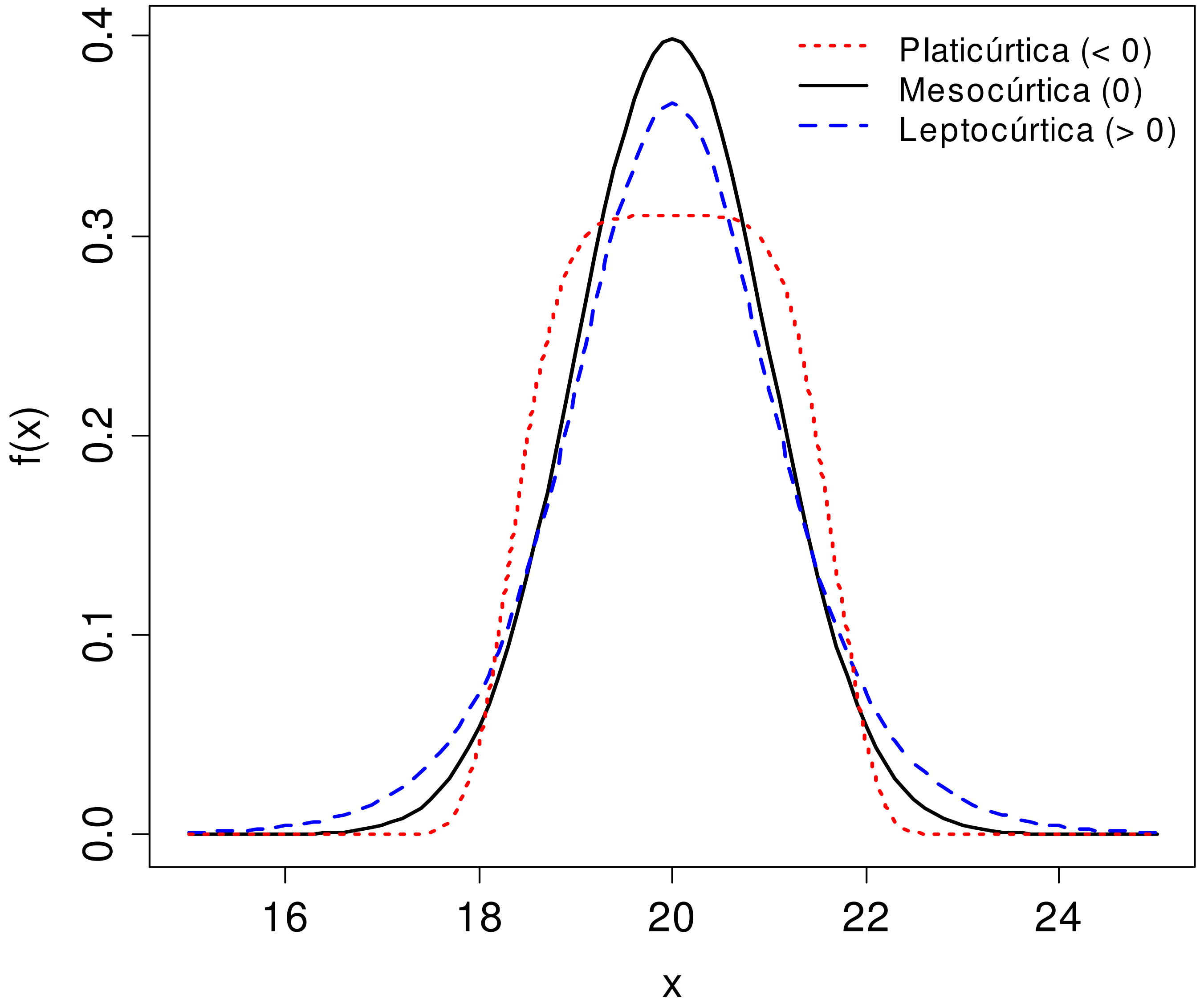
Muitas vezes a curtose é expressa como $g_{2e} = g_2 - 3$ (*excess*).

Platicúrtica: $g_{2e} < 0$.

Mesocúrtica: $g_{2e} = 0$.

Leptocúrtica: $g_{2e} > 0$.

Distribuições simétricas com médias e variâncias iguais:



Momentos em R

Pacote `moments`

```
> library(moments)
```

Exemplo. 1, 0, 2,7, -1,4 e 13 são os momentos centrais até ordem 4 de um conjunto de dados com média = 3,8.

```
> momc = c(1,  0,  2.7, -1.4, 13)
> xb =  3.8
> (mom0 = central2raw(momc, xb))
[1] 1.0000 3.8000 17.1400 84.2520 434.1616
```
(momentos não centrais)

Função `raw2central`: converte momentos não centrais em centrais.

```
> mom0 = c(1.0,  1.5,  3.1,  8.4, 27.0)
> (momc = raw2central(mom0))
[1] 1.0000 0.0000 0.8500 1.2000 3.2625
```
(momentos centrais)

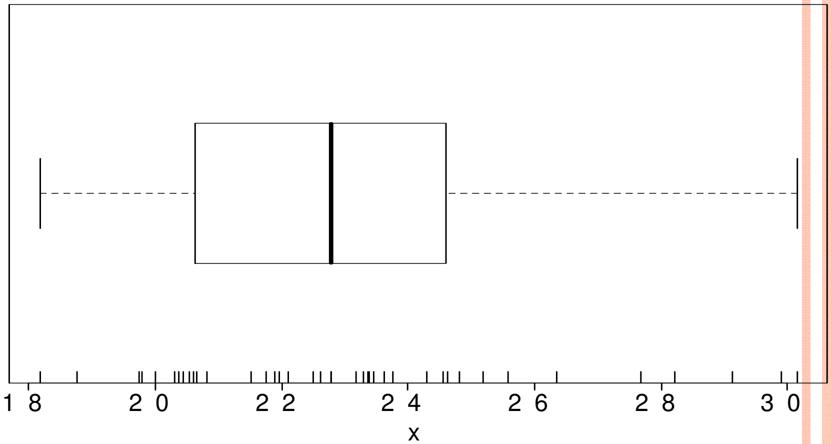
Momentos em R

40 observações

```
x = c(21.88, 22.61, 23.28, 25.19, 19.73, 22.50, 26.35, 22.09, 24.63,
19.79, 23.61, 29.91, 29.12, 23.17, 23.38, 21.75, 18.77, 20.38,
20.45, 28.23, 18.17, 30.15, 20.60, 19.99, 24.56, 25.59, 20.66,
23.76, 23.35, 22.77, 21.52, 20.54, 20.30, 23.45, 27.69, 24.82,
24.30, 21.97, 20.82, 22.78)
```

```
> boxplot(x, horizontal = TRUE,
xlab = "X")

> rug(x)
```



Momento não central de ordem 3:

```
> moment(x, order = 3, central = FALSE)
[1] 12960.19
```

Qual o resultado de `mean(x^3)`?

Momentos centrais até ordem 4:

```
> (mom4 = all.moments(x, order.max = 4, central = TRUE))
```

```
[1] 1.000000e+00 4.440892e-16 8.521595e+00 1.843078e+01 2.206282e+02
```

k = 0 1 2 3 4

Assimetria e curtose em R

Pacote `moments`

```
> skewness(x)
[1] 0.7409046
```

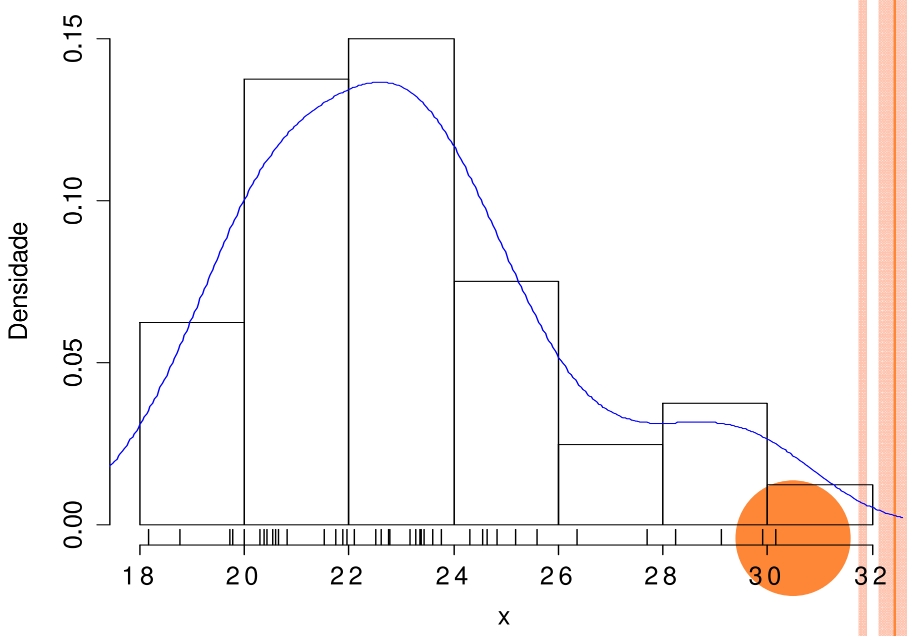
Qual o resultado de `mom4[4] / mom4[3]^1.5`?

```
> kurtosis(x)
[1] 3.03822
```

Qual o resultado de `mom4[5] / mom4[3]^2`?

```
> kurtosis(x) - 3
[1] 0.03822
```

```
> hist(x, main = "", xlab = "x", freq = FALSE, ylab = "Densidade")
> rug(x)
> lines(density(x), col = "blue")
```



Dados faltantes (*missing data*) em R

Observações indisponíveis por algum motivo.

Em R: `NA` (*not available*).

40 (?) observações

```
x = c(21.88, NA, 23.28, 25.19, 19.73, 22.50, 26.35, 22.09, 24.63,
19.79, 23.61, 29.91, 29.12, 23.17, 23.38, 21.75, NA, 20.38, 20.45,
28.23, 18.17, 30.15, 20.60, 19.99, 24.56, 25.59, 20.66, 23.76,
23.35, NA, 21.52, 20.54, 20.30, 23.45, 27.69, 24.82, 24.30, 21.97,
20.82, 22.78)
```

```
> summary(x)

 Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.    NA's
18.17   20.66   23.17   23.26   24.63   30.15    3.00
```

```
> which(is.na(x))
[1]  2 17 30
```

```
> mean(x)
[1] NA
```

```
> mean(x, na.rm = TRUE)
[1] 23.25568
```

```
> kurtosis(x)
[1] NA
```

```
> kurtosis(x, na.rm = TRUE)
[1] 2.891447
```

Substituição dos faltantes pela média:

```
> is.na(x) = mean(x, na.rm = TRUE)
```