

SCE5880
Algoritmos de Estimação para
Robótica Móvel

SLAM II
Localização e Mapeamento
Simultâneos

1

GraphSLAM

- As posições do robô ao longo do tempo e os landmarks correspondem a nós em um grafo.
- As informações odométricas entre posições consecutivas e landmarks vistos em diferentes posições equivalem a arcos do grafo
- O algoritmo é executado em 2 etapas.
 - Na primeira etapa, o mesmo apenas acumula dados e constrói o grafo.
 - Na segunda etapa, o o grafo é rearranjado para acomodar os dados obtidos.
- Diferente do SLAM utilizando filtro de Kalman, o Graph SLAM estima a posição do robô durante todo o trajeto.

2

Filtro de Informação

- 1: **Algorithm Kalman_filter**($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$):
- 2: $\hat{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
- 3: $\hat{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$
- 4: $K_t = \hat{\Sigma}_t C_t^T (C_t \hat{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
- 5: $\mu_t = \hat{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \hat{\mu}_t)$
- 6: $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \hat{\Sigma}_t$
- 7: return μ_t, Σ_t

- 1: **Algorithm Information_filter**($\xi_{t-1}, \Omega_{t-1}, u_t, z_t$):
- 2: $\Omega_t = (A_t \Omega_{t-1} A_t^T + R_t)^{-1}$
- 3: $\xi_t = \Omega_t (A_t \Omega_{t-1}^{-1} \xi_{t-1} + B_t u_t)$
- 4: $\Omega_t = C_t^T Q_t^{-1} C_t + \Omega_t$
- 5: $\xi_t = C_t^T Q_t^{-1} z_t + \xi_t$
- 6: return ξ_t, Ω_t

3

GraphSLAM

Sum of all constraints:
 $J_{GraphSLAM} = x_0^T \Omega_0 x_0 + \sum [x_i - g(u_i, x_{i-1})]^T R^{-1} [x_i - g(u_i, x_{i-1})] + \sum [z_i - h(m_i, x_i)]^T Q^{-1} [z_i - h(m_i, x_i)]$

4

Information Filter

Controle:

$$\Omega \leftarrow \Omega + \begin{pmatrix} 1 \\ -G_t \end{pmatrix} R_t^{-1} (1 - G_t)$$

$$\xi \leftarrow \xi + \begin{pmatrix} 1 \\ -G_t \end{pmatrix} R_t^{-1} [g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \mu_{t-1}]$$

Percepção:

$$\Omega \leftarrow \Omega + H_t^T Q_t^{-1} H_t$$

$$\xi \leftarrow \xi + H_t^T Q_t^{-1} [z_t^i - h(\mu_t, c_t^i) - H_t \mu_t]$$

5

GraphSLAM

6

GraphSLAM

(a) The removal of m_3 changes the link between x_2 and x_3

(b) The removal of m_3 introduces a new link between x_2 and x_4

(c) Final Result after removing all map features

SCE-5868 Denis F. Wolf 7

Filtro de Informação

Matriz de informação $\rightarrow \Omega = \Sigma^{-1}$

Vetor de informação $\rightarrow \xi = \Sigma^{-1} \mu$

$$\Sigma = \Omega^{-1}$$

$$\mu = \Omega^{-1} \xi$$

SCE-5868 Denis F. Wolf 8

GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 9

GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 10

GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 11

GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 12

GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 13

Coordinated exploration with three robots from unknown start locations

The robots are fully autonomous. All computation is performed on-board.

Shown is the perspective of one robot

SCE-5868 Denis F. Wolf 14

GraphSLAM - Implementação

Ω

	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	L ₀
X ₀					
X ₁					
X ₂					
X ₃					
L ₀					

ξ

X ₀	
X ₁	
X ₂	
X ₃	
L ₀	

SCE-5868 Denis F. Wolf 15

GraphSLAM - Implementação

Ω

	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	L ₀
X ₀	1				
X ₁					
X ₂					
X ₃					
L ₀					

ξ

X ₀	2
X ₁	
X ₂	
X ₃	
L ₀	

$X_0 = 2$

SCE-5868 Denis F. Wolf 16

GraphSLAM - Implementação

Ω

	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	L ₀
X ₀	1+1	-1			
X ₁	-1	+1			
X ₂					
X ₃					
L ₀					

ξ

X ₀	2-5
X ₁	+5
X ₂	
X ₃	
L ₀	

$X_1 = X_0 + 5$

$X_0 - X_1 = -5$

$X_1 - X_0 = 5$

SCE-5868 Denis F. Wolf 17

GraphSLAM - Implementação

Ω

	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	L ₀
X ₀	2	-1			
X ₁	-1	1			
X ₂					
X ₃					
L ₀					

ξ

X ₀	-3
X ₁	5
X ₂	
X ₃	
L ₀	

$X_1 = X_0 + 5$

$X_0 - X_1 = -5$

$X_1 - X_0 = 5$

SCE-5868 Denis F. Wolf 18

GraphSLAM - Implementação

Ω					ξ					
	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0					
X_0	2	-1				X_0	-3			
X_1	-1	1+1			-1	X_1	5-9			
X_2						X_2				
X_3						X_3				
L_0		-1			+1	L_0	+9			

$L_0 = X_1 + 9$
 $X_1 - L_0 = -9$
 $L_0 - X_1 = 9$

SCE-5868 Denis F. Wolf 19

GraphSLAM - Implementação

Ω					ξ					
	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0					
X_0	2	-1				X_0	-3			
X_1	-1	2			-1	X_1	-4			
X_2						X_2				
X_3						X_3				
L_0		-1			1	L_0	9			

$L_0 = X_1 + 9$
 $X_1 - L_0 = -9$
 $L_0 - X_1 = 9$

SCE-5868 Denis F. Wolf 20

GraphSLAM - Implementação

Ω					ξ					
	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0					
X_0	2	-1				X_0	-3			
X_1	-1	2+1	-1		-1	X_1	-4+1			
X_2		-1	+1			X_2	-1			
X_3						X_3				
L_0		-1			1	L_0	9			

$X_2 = X_1 - 1$
 $X_1 - X_2 = +1$
 $X_2 - X_1 = -1$

SCE-5868 Denis F. Wolf 21

GraphSLAM - Implementação

Ω					ξ					
	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0					
X_0	2	-1				X_0	-3			
X_1	-1	3	-1		-1	X_1	-3			
X_2		-1	1			X_2	-1			
X_3						X_3				
L_0		-1			1	L_0	9			

$X_2 = X_1 - 1$
 $X_1 - X_2 = +1$
 $X_2 - X_1 = -1$

SCE-5868 Denis F. Wolf 22

GraphSLAM - Implementação

Ω					ξ					
	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0					
X_0	2	-1				X_0	-3			
X_1	-1	3	-1		-1	X_1	-3			
X_2		-1	1+1	-1		X_2	-1-4			
X_3			-1	+1		X_3	+4			
L_0		-1			1	L_0	9			

$X_3 = X_2 + 4$
 $X_2 - X_3 = -4$
 $X_3 - X_2 = 4$

SCE-5868 Denis F. Wolf 23

GraphSLAM - Implementação

Ω					ξ					
	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0					
X_0	2	-1				X_0	-3			
X_1	-1	3	-1		-1	X_1	-3			
X_2		-1	2	-1		X_2	-5			
X_3			-1	1		X_3	4			
L_0		-1			1	L_0	9			

$X_3 = X_2 + 4$
 $X_2 - X_3 = -4$
 $X_3 - X_2 = 4$

SCE-5868 Denis F. Wolf 24

GraphSLAM - Implementação

$$\Omega \quad \xi \quad L_0 = X_3 + 6$$

	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0		X_0	-3	$X_3 - L_0 = -6$
X_0	2	-1				X_0	-3	$L_0 - X_3 = 6$	
X_1	-1	3	-1		-1	X_1	-3		
X_2		-1	2	-1		X_2	-5		
X_3			-1	1+1	-1	X_3	4-6		
L_0		-1		-1	1+1	L_0	9+6		

SCE-5868 Denis F. Wolf 25

GraphSLAM - Implementação

$$\Omega \quad \xi \quad L_0 = X_3 + 6$$

	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0		X_0	-3	$X_3 - L_0 = -6$
X_0	2	-1				X_0	-3	$L_0 - X_3 = 6$	
X_1	-1	3	-1		-1	X_1	-3		
X_2		-1	2	-1		X_2	-5		
X_3			-1	2	-1	X_3	-2		
L_0		-1		-1	2	L_0	15		

SCE-5868 Denis F. Wolf 26

GraphSLAM - Implementação

Solução:

$$\Sigma = \Omega^{-1}$$

$$\mu = \Omega^{-1} \cdot \xi$$

SCE-5868 Denis F. Wolf 27

GraphSLAM - Implementação

Solução:

$$\Sigma = \Omega^{-1}$$

$$\mu = \Omega^{-1} \cdot \xi$$

X_0	2
X_1	7
X_2	6
X_3	10
L_0	16

SCE-5868 Denis F. Wolf 28

GraphSLAM - Implementação

Solução:

$$\Sigma = \Omega^{-1}$$

$$\mu = \Omega^{-1} \cdot \xi$$

	X_0	X_1	X_2	X_3	L_0
X_0	1	1	1	1	1
X_1	1	2	2	2	2
X_2	1	2	2.75	2.5	2.25
X_3	1	2	2.5	3	2.5
L_0	1	2	2.25	2.5	2.75

SCE-5868 Denis F. Wolf 29

GraphSLAM - Implementação

```

1: Algorithm GraphSLAM_initialize( $\mu_{i+1}$ ):
2:    $\begin{pmatrix} \mu_{0,x} \\ \mu_{0,y} \\ \mu_{0,\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
3:   for all controls  $u_i = (v_i, \omega_i)^T$  do
4:      $\begin{pmatrix} \mu_{i,x} \\ \mu_{i,y} \\ \mu_{i,\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{i-1,x} \\ \mu_{i-1,y} \\ \mu_{i-1,\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_i \cos(\mu_{i-1,\theta} + \frac{\omega_i}{2} \Delta t) \\ v_i \sin(\mu_{i-1,\theta} + \frac{\omega_i}{2} \Delta t) \\ \omega_i \Delta t \end{pmatrix}$ 
5:   endfor
6:   return  $\mu_{i+1}$ 

```

SCE-5868 Denis F. Wolf 30

GraphSLAM – Implementação

(continued from the previous page)

```

7:   add  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & G_i & \\ & & -G_i \end{pmatrix} R_i^{-1} (I - G_i)$  to  $\Omega$  at  $x_i$  and  $x_{i-1}$ 
8:   add  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & G_i & \\ & & -G_i \end{pmatrix} R_i^{-1} [B_i + G_i \mu_{0:i}]$  to  $\xi$  at  $x_i$  and  $x_{i-1}$ 
9:   endfor
10:  for all measurements  $m_j$  do
11:     $Q_j = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$ 
12:    for all observed features  $q_j = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  do
13:       $j = q_j$ 
14:       $\delta = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{1j} - p_{1x} \\ p_{2j} - p_{2x} \\ p_{3j} - p_{3x} \end{pmatrix}$ 
15:       $q = \delta^T \delta$ 
16:       $H_j = \begin{pmatrix} \sqrt{q_1} & & \\ & \sqrt{q_2} & \\ & & \sqrt{q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1j} - p_{1x} \\ p_{2j} - p_{2x} \\ p_{3j} - p_{3x} \end{pmatrix}$ 
17:       $H_j = \frac{1}{\sqrt{q_1}} \begin{pmatrix} \sqrt{q_1} & & \\ & \sqrt{q_2} & \\ & & \sqrt{q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1j} - p_{1x} \\ p_{2j} - p_{2x} \\ p_{3j} - p_{3x} \end{pmatrix}$ 
18:      add  $H_j^T Q_j^{-1} H_j$  to  $\Omega$  at  $x_i$  and  $m_j$ 
19:      add  $H_j^T Q_j^{-1} [z_j - H_j \begin{pmatrix} \mu_{0:i} \\ \mu_{0:i} \\ \mu_{0:i} \end{pmatrix}]$  to  $\xi$  at  $x_i$  and  $m_j$ 
20:    endfor
21:  endfor
22:  return  $\Omega, \xi$ 

```

Algorithm GraphSLAM_linearize($\Omega, \xi, x_i, c_{1:i}, c_{2:i}, \mu_{0:i}$):

```

1:  set  $\Omega = 0, \xi = 0$ 
2:  add  $\begin{pmatrix} \infty & & \\ & \infty & \\ & & \infty \end{pmatrix}$  to  $\Omega$  at  $x_i$ 
3:  for all controls  $w_i = [w_1 \ w_2]^T$  do
4:     $\hat{x}_i = \mu_{0:i} + \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{1,i}}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial x_{1,i}}{\partial w_2} w_2 \\ \frac{\partial x_{2,i}}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial x_{2,i}}{\partial w_2} w_2 \\ \frac{\partial x_{3,i}}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial x_{3,i}}{\partial w_2} w_2 \end{pmatrix}$ 
5:     $G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial x_{1,i}}{\partial w_1} & \frac{\partial x_{1,i}}{\partial w_2} \\ 0 & 1 & \frac{\partial x_{2,i}}{\partial w_1} & \frac{\partial x_{2,i}}{\partial w_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial x_{3,i}}{\partial w_1} & \frac{\partial x_{3,i}}{\partial w_2} \end{pmatrix}$ 

```

SCE-5868 Denis F. Wolf

GraphSLAM – Implementação

```

1:  Algorithm GraphSLAM_reduce( $\Omega, \xi$ ):
2:     $\tilde{\Omega} = \Omega$ 
3:     $\tilde{\xi} = \xi$ 
4:    for each feature  $j$  do
5:      let  $\tau(j)$  be the set of all poses  $x_i$  at which  $j$  was observed
6:      subtract  $\tilde{\Omega}_{\tau(j),j} \tilde{\Omega}_{j,\tau(j)}^{-1} \xi_j$  from  $\tilde{\xi}$  at  $x_{\tau(j)}$  and  $m_j$ 
7:      subtract  $\tilde{\Omega}_{\tau(j),j} \tilde{\Omega}_{j,\tau(j)}^{-1} \tilde{\Omega}_{j,\tau(j)}$  from  $\tilde{\Omega}$  at  $x_{\tau(j)}$  and  $m_j$ 
8:      remove from  $\tilde{\Omega}$  and  $\tilde{\xi}$  all rows/columns corresponding to  $j$ 
9:    endfor
10:   return  $\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}$ 

```

SCE-5868 Denis F. Wolf

GraphSLAM – Implementação

```

1:  Algorithm GraphSLAM_solve( $\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}, \Omega, \xi$ ):
2:     $\Sigma_{0:t} = \tilde{\Omega}^{-1}$ 
3:     $\mu_{0:t} = \Sigma_{0:t} \tilde{\xi}$ 
4:    for each feature  $j$  do
5:      set  $\tau(j)$  to the set of all poses  $x_i$  at which  $j$  was observed
6:       $\mu_j = \Omega_{j,j}^{-1} (\xi_j + \Omega_{j,\tau(j)} \mu_{\tau(j)})$ 
7:    endfor
8:    return  $\mu, \Sigma_{0:t}$ 

```

SCE-5868 Denis F. Wolf

GraphSLAM – Implementação

```

1:  Algorithm GraphSLAM_known_correspondence( $u_{1:t}, z_{1:t}, c_{1:t}$ ):
2:     $\mu_{0:t} = \text{GraphSLAM_initialize}(u_{1:t})$ 
3:    repeat
4:       $\Omega, \xi = \text{GraphSLAM_linearize}(u_{1:t}, z_{1:t}, c_{1:t}, \mu_{0:t})$ 
5:       $\tilde{\Omega}, \tilde{\xi} = \text{GraphSLAM_reduce}(\Omega, \xi)$ 
6:       $\mu, \Sigma_{0:t} = \text{GraphSLAM_solve}(\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}, \Omega, \xi)$ 
7:    until convergence
8:    return  $\mu$ 

```

SCE-5868 Denis F. Wolf

GraphSLAM

Resumo:

Método off-line que estima a trajetória completa do robô e o mapa.

SCE-5868 Denis F. Wolf

Rao-blackwellized Particle Filter (FastSLAM)

Idéia básica: utilizar um filtro de partículas para estimar a posição do robô e o mapa do ambiente.

- Vantagens:**
 - Modelos de percepção e controle não-lineares ☹
 - Permite diferentes associações de dados em paralelo ☹
 - Estima toda a trajetória do robô on-line ☹
- Desvantagem:**
 - Número de partículas necessário cresce exponencialmente com o número de variáveis. ☹ ☹ ☹

SCE-5868 Denis F. Wolf

Rao-blackwellized Particle Filter

Como simplificar o problema:
 Existe alguma **dependência** entre as variáveis?

O mapa depende da posição do robô!

SCE-5868 Denis F. Wolf 37

Rao-blackwellized Particle Filter

posição mapa sensores & controle

$$p(x_{1:t}, l_{1:m} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(l_{1:m} | x_{1:t}, z_{1:t})$$

Fatorização apresentada originalmente por Murphy em 1999

SCE-5868 Denis F. Wolf 38

Rao-blackwellized Particle Filter

Quando o trajeto do robô é conhecido, a posição dos landmarks é estimada de maneira independente

SCE-5868 Denis F. Wolf 39

Fatoração do mapeamento

$$p(x_{1:t}, l_{1:m} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(l_{1:m} | x_{1:t}, z_{1:t}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot \prod_{i=1}^M p(l_i | x_{1:t}, z_{1:t})$$

Localização

Posições dos landmarks condicionalmente independentes

SCE-5868 Denis F. Wolf 40

FastSLAM

- Rao-Blackwellized particle filtering baseado em landmarks [Montemerlo et al., 2002]
- Cada landmark é representado por um 2x2 Extended Kalman Filter (EKF)
- Cada partícula mantém M EKFs

Particle #1	x, y, θ	Landmark 1	Landmark 2	Landmark M
Particle #2	x, y, θ	Landmark 1	Landmark 2	Landmark M
...
Particle N	x, y, θ	Landmark 1	Landmark 2	Landmark M

SCE-5868 Denis F. Wolf 41

FastSLAM - Action Update

Landmark #1 Filter

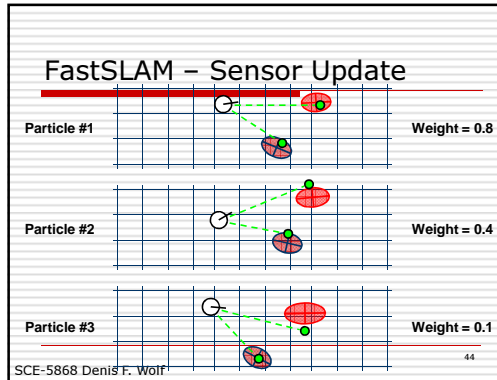
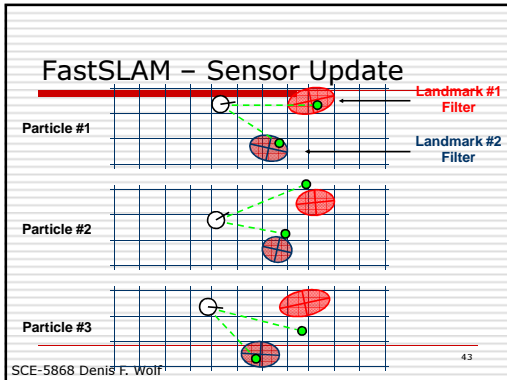
Landmark #2 Filter

Particle #1

Particle #2

Particle #3

SCE-5868 Denis F. Wolf 42



Rao-blackwellized Particle Filter

[Video: SLAM com câmera stereo](#)

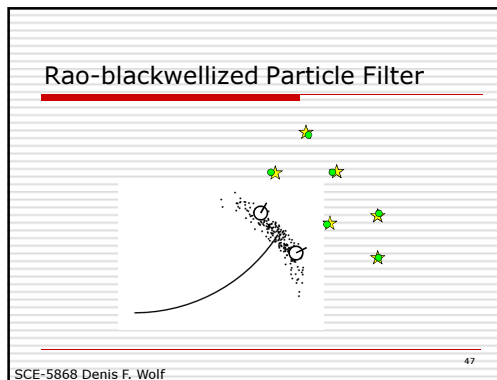
SCE-5868 Denis F. Wolf 45

Problema: associação de dados

- Qual observação corresponde a qual landmark?

- Possíveis associações dependem da posição do robô.
- Soluções robustas para o SLAM devem considerar varias associações possíveis.

SCE-5868 Denis F. Wolf 46



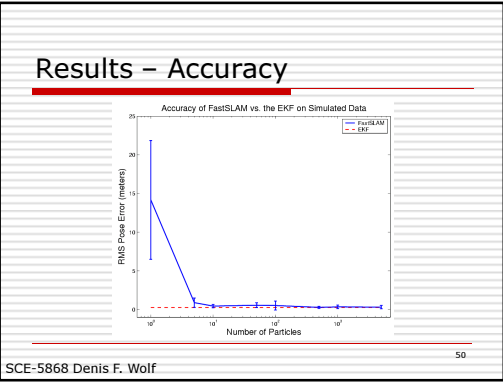
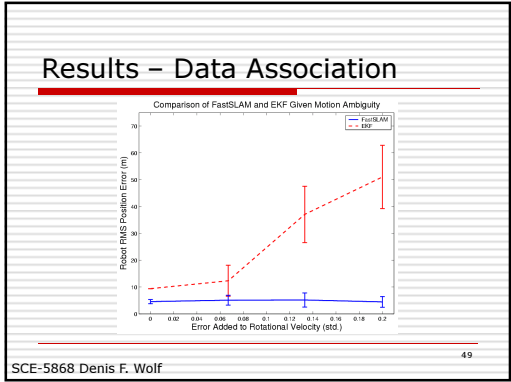
Associação de dados

A observação foi gerada pelo landmark vermelho ou pelo azul?

$P(\text{observation}|\text{red}) = 0.3$ $P(\text{observation}|\text{blue}) = 0.7$

- Duas opções para a associação:
 - Associar ao mais provável
 - Associação aleatória utilizando o peso proporcional a probabilidade
- Se a probabilidade de associação é muito pequena, gerar um novo landmark.

SCE-5868 Denis F. Wolf 48



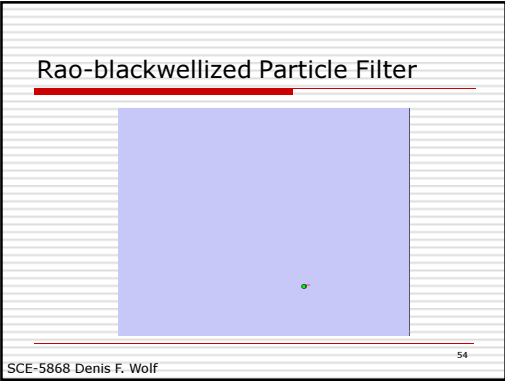
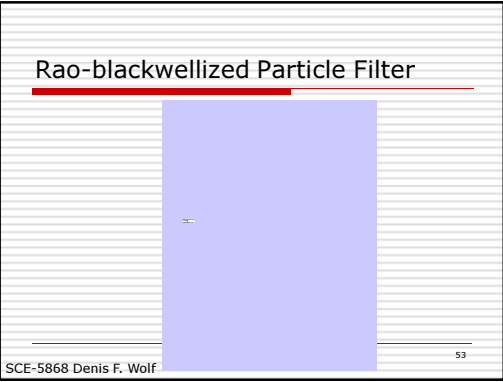
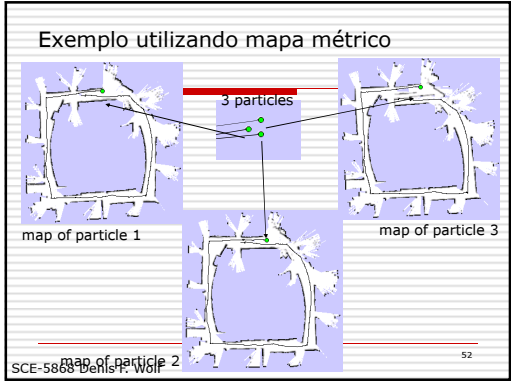
Rao-blackwellized Particle Filter

posição mapa sensores & controle

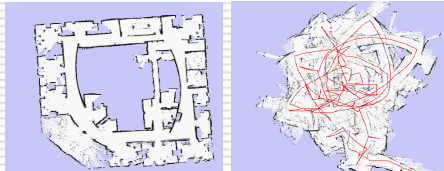
$$p(x_{1:t}, m | z_{1:t}, u_{0:t-1}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(m | x_{1:t}, z_{1:t})$$

occupancy grid

SCE-5868 Denis F. Wolf 51



Rao-blackwellized Particle Filter



RB Particle Filter

Odometria

SCE-5868 Denis F. Wolf

55

Rao-blackwellized Particle Filter

Resumo:

- ❑ Cada partícula representa uma trajetória do robô, juntamente com o respectivo mapa gerado.
- ❑ Decompõe o mapa em várias distribuições normais de poucas dimensões ao invés de uma única distribuição com várias dimensões.
- ❑ Resolve ambos os problemas de on-line SLAM e full SLAM.

SCE-5868 Denis F. Wolf

56