



## Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares

Método Iterativo de Gauss-Seidel

# Jacobi-Richardson

- O método de Jacobi Richardson reescreve o sistema  $Ax = b$  na forma:

$$x = Bx + g$$

$$\text{Com } B = -(L^* + R^*), g = b^*$$

obtendo o processo iterativo

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g.$$

Que pode ser então descrito como:

$$x^{(k+1)} = -L^*x^{(k)} - R^*x^{(k)} + b^*.$$

# Jacobi-Richardson

- Se escrevemos variável por variável, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1^{(k+1)} = \underbrace{-a_{12}^* x_2^{(k)} - a_{13}^* x_3^{(k)} \dots - a_{1n}^* x_n^{(k)}}_{-R^* x^{(k)}} \\
 x_2^{(k+1)} = \underbrace{-a_{21}^* x_1^{(k)}}_{-L^* x^{(k)}} \underbrace{-a_{23}^* x_3^{(k)} \dots - a_{2n}^* x_n^{(k)}}_{-R^* x^{(k)}} \\
 x_3^{(k+1)} = \underbrace{-a_{31}^* x_1^{(k)} - a_{32}^* x_2^{(k)}}_{-L^* x^{(k)}} \underbrace{-a_{34}^* x_4^{(k)} \dots - a_{3n}^* x_n^{(k)}}_{-R^* x^{(k)}} \\
 \dots \\
 x_n^{(k+1)} = \underbrace{-a_{n1}^* x_1^{(k)} - a_{n2}^* x_2^{(k)} \dots - a_{nn-1}^* x_{n-1}^{(k)}}_{-L^* x^{(k)}}
 \end{array} \right.$$

# Jacobi-Richardson

- Note que quando vamos calcular  $x_2^{(k+1)}$ , já sabemos  $x_1^{(k+1)}$ .

$$x_2^{(k+1)} = \underbrace{-a_{21}^* x_1^{(k)}}_{-L^* x^{(k)}} - \underbrace{a_{23}^* x_3^{(k)} \dots - a_{2n}^* x_n^{(k)}}_{-R^* x^{(k)}}$$

- Note que quando vamos calcular  $x_3^{(k+1)}$ , já sabemos  $x_1^{(k+1)}$  e  $x_2^{(k+1)}$ .

$$x_3^{(k+1)} = \underbrace{-a_{31}^* x_1^{(k)} - a_{32}^* x_2^{(k)}}_{-L^* x^{(k)}} - \underbrace{a_{34}^* x_4^{(k)} \dots - a_{3n}^* x_n^{(k)}}_{-R^* x^{(k)}}$$

Em geral, já sabemos os valores de  $x$  que multiplicam  $L^*$ .

# Gauss-Seidel

- Como  $x_1^{(k+1)}$  é uma melhor aproximação de  $x_1$  do que  $x_1^{(k)}$ , por que não usá-lo no cálculo de  $x_2^{(k+1)}$ ?
- Como  $x_1^{(k+1)}$  e  $x_2^{(k+1)}$  são melhores aproximações de uma melhor aproximação de  $x_1$  e  $x_2$  do que  $x_1^{(k)}$  e  $x_2^{(k)}$ , por que não usá-los no cálculo de  $x_3^{(k+1)}$ ?
- Em geral, por que não usar as novas aproximações nos termos determinados pela multiplicação com  $L^*$ ?

Essa é a idéia do método de Gauss-Seidel.

# Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k)} - R^* x^{(k)} + b^*.$$

Jacobi-Richardson



$$x^{(k+1)} = -L^* x^{(k+1)} - R^* x^{(k)} + b^*.$$

Gauss-Seidel

# Convergência

- O método converge se:
  - O critério das linhas for atendido:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^*| < 1$$

- ou, se a matriz for estritamente diagonal dominante
- ou, se o critério de Sassenfeld for atendido:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$$

elementos antes da diagonal e  $\beta$  associado

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}^*| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^*|$$

elementos depois do elemento da diagonal

# Notas

- Dado um sistema  $Ax=b$ , pode ser que o método de Jacobi-Richardson seja convergente, mas não o método de Gauss-Siedel, e vice-versa
- Se  $\|B\|$  não for muito menor que 1, a convergência pode ser lenta.
- Uma permutação conveniente das linhas ou colunas de  $A$  antes de dividir cada equação pelo coeficiente da diagonal principal pode reduzir significativamente  $\|B\|$ .



# Notas

- A convergência independe de  $x^{(0)}$ .
  - Obviamente, o número de iterações até a obtenção de uma solução de erro adequado depende será quanto menor quanto mais próximo estiver  $x^{(0)}$  da solução.
  
- Em geral tomam-se as condições iniciais:
  - $x^{(0)} = (0 \ 0 \ 0 \dots \ 0)^t$  para o método de Gauss-Siedel
  - $x^{(0)} = b^*$  para o método de Jacobi-Richardson.
  
- Na implementação computacional, Gauss-Siedel necessita um único vetor para as variáveis. Jacobi-Richardson necessita dois.

# Exemplo

Exemplo 5.3 - Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

pelos métodos de Gauss-Seidel com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

Obtemos o sistema de trabalho dividindo os elementos de cada linha pelo elemento da diagonal (inclusive os elementos de b):

$$\begin{cases} x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 = 1 \\ 0.75x_1 + x_2 + 0.25x_3 = 1.5 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

## Exemplo (solução)

■ verificando convergência:

$$\begin{cases} x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 = 1 \\ 0.75x_1 + x_2 + 0.25x_3 = 1.5 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- A matriz não é estritamente diagonal dominante, não podemos concluir nada sobre a convergência por este critério.
- Se a matriz não é estritamente diagonal dominante, o critério das linhas também não é satisfeito.
- Nos resta o critério de Sassenfeld:

$$\beta_1 = |0.2| + |0.2| = 0.4 ,$$

$$\beta_2 = |0.75|(0.4) + |0.25| = 0.3 + 0.25 = 0.55$$

$$\beta_3 = |0.5|(0.4) + |0.5|(0.55) = 0.2 + 0.275 = 0.475$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i = 0.55 < 1 \quad \text{critério de Sassenfeld respeitado.}$$

## Exemplo (solução)

- As iterações são definidas por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= -0.2 x_2^{(k)} - 0.2 x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} &= -0.75 x_1^{(k+1)} - 0.25 x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.5 x_1^{(k+1)} - 0.5 x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

usando o vetor nulo como solução inicial, temos, para a primeira iteração:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= -0.2x_2^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} + 1 = -0.2(0) - 0.2(0) + 1 = 1 \\ x_2^{(1)} &= -0.75x_1^{(1)} - 0.25x_3^{(0)} + 1.5 = -0.75(1) - 0.25(0) + 1.5 = 0.75 \\ x_3^{(1)} &= -0.5x_1^{(1)} - 0.5x_2^{(1)} = -0.5(1) - 0.5(0.75) = -0.875 \end{cases}$$

## Exemplo (solução)

- Continuando o processo:

k	0	1	2	3	4
$x_1$	0	1	1.025	1.0075	1.0016
$x_2$	0	0.75	0.95	0.9913	0.9987
$x_3$	0	- 0.875	- 0.9875	- 0.9994	- 1.0002

- E podemos para na iteração 4 pois:

$$x^{(4)} - x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.0057 \\ 0.0074 \\ 0.00075 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|x^{(4)} - x^{(3)}\|_{\infty}}{\|x^{(4)}\|_{\infty}} = \frac{0.0074}{1.0016} \simeq 0.0074 < 10^{-2}$$