

#### 4ª Lista de Exercícios - SME0812 Modelos Lineares - 27/09/2012

Entregar exercícios 2, 6, 7 e 8 em 04/10/2012

---

**Exercício 1.** Considere o modelo  $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  com  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  variáveis aleatórias independentes e  $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^2$ .

- Obtenha o estimador não viesado de variância uniformemente mínima de  $\beta$ .
- Determine a variância desse estimador.
- Obtenha um intervalo com coeficiente de confiança  $1 - \alpha$  para  $\beta$ .

**Exercício 2.** Deseja-se comparar dois métodos de ensino A e B e com esse objetivo, aplicou-se uma prova a  $n_1$  alunos sujeitos ao método de ensino A e  $n_2$  alunos sujeitos ao método de ensino B. Admitindo o modelo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 W_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

com  $\epsilon_i$  e  $\epsilon_j$  variáveis aleatórias independentes para  $i \neq j$ ,  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  e

$$W_i = \begin{cases} 0 & \text{para o método A e} \\ 1 & \text{para o método B} \end{cases}$$

e  $Y_i$  a nota da prova do  $i$ -ésimo aluno.

- Qual o significado de  $\beta_0$  e  $\beta_1$ ?
- Obtenha o estimador não viesado de variância uniformemente mínima da diferença das notas médias para alunos sujeitos aos métodos A e B, justificando sua resposta.
- Construa um teste de hipóteses para a igualdade das notas médias seguindo os dois métodos, contra a hipótese alternativa de que as médias são diferentes. Utilize a forma geral  $C\beta = \mathbf{m}$ .
- Prove que o teste do item (c) é equivalente ao teste  $t$  de igualdade de médias para amostras independentes.

**Exercício 3.** Considere o modelo  $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$  com  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2 x_i^2)$ ,  $\epsilon_i$  e  $\epsilon_j$  variáveis aleatórias independentes para  $i \neq j$ . Considere os valores de  $X$  e  $Y$  para uma amostra de 5 observações a seguir.

X	1	2	5	5	10
Y	13	10	20	15	50

- Obtenha os estimadores não viesados de variância uniformemente mínima para  $\alpha$  e  $\beta$  e as correspondentes estimativas.
- Teste, ao nível de significância  $\alpha = 0,10$ , a hipótese  $H_0 : \beta = 1$  contra  $H_1 : \beta > 1$ .

**Exercício 4.** Obtenha os estimadores de mínimos quadrados generalizados para os parâmetros do modelo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

em que com  $\epsilon_i$  e  $\epsilon_j$  variáveis aleatórias independentes para  $i \neq j$  e sabendo que

$$\text{Var}(Y|X) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } X = 1, 2 \text{ ou } 3 \text{ e} \\ 2\sigma^2 & \text{para } X = 4 \text{ ou } 5 \end{cases}$$

com base nos dados

X	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
Y	2,5	3,5	3,5	4,5	4,5	5,5	5,0	7,0	6,0	8,0

Admitindo a normalidade dos erros, teste a hipótese  $H_0 : \beta_1 = 0$  contra  $H_1 : \beta_1 \neq 0$ .

**Exercício 5.** Considere o modelo

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta_1 + \epsilon_1 \\ Y_2 &= 2\theta_1 - \theta_2 + \epsilon_2 \\ Y_3 &= \theta_1 + 2\theta_2 + \epsilon_3 \end{aligned}$$

com  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)' \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ .

Obtenha o teste para avaliar se  $H_0 : \theta_1 = \theta_2$  contra  $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$ .

**Exercício 6.** Considere o modelo de locação  $Y_i = \mu + \epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  com  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)' \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$  em que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho & \dots & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que  $\hat{\beta}$  da forma usual coincide com  $\hat{\beta}_G$  nesse modelo.  
 (b) Determine a matriz  $F$  tal que  $\Sigma X = XF$ .

**Exercício 7.** Os dados a seguir correspondem a uma amostra de  $n = 20$  terrenos localizados em três diferentes regiões de uma cidade, sendo  $X$  a área do terreno (em  $m^2$ ) e  $Y$  o preço

X	200	200	250	300	300	400	400	450	500	500
Y	16	12	20	24	20	22	33	34	40	41
região	C	A	B	B	A	A	C	B	C	C
X	550	550	600	600	600	700	700	800	800	800
Y	43	42	50	50	48	55	54	60	61	62
região	B	A	C	C	B	B	A	A	A	A

- (a) Ajuste um modelo de regressão do tipo  $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$ .  
 (b) Construa o gráfico dos resíduos contra a região. O que podemos concluir sobre a influência da região no preço dos terrenos?  
 (c) Admitindo um modelo de três retas paralelas para as regiões A, B e C, com o auxílio de variáveis dummy, obtenha as equações para as três retas ajustadas. Que restrição está sendo imposta quando assumimos o paralelismo das três retas?  
 (d) Teste a hipótese de que as retas para as regiões B e C são coincidentes.  
 (e) Teste a hipótese de que o preço independe da região.

**Exercício 8.** Obtenha o teste da razão de verossimilhanças generalizada para  $H_0 : \beta = \mathbf{b}$  com  $\mathbf{b}$  um vetor de constantes conhecido, no modelo

$$\mathbf{Y} = X\beta + \epsilon \text{ com } \epsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$$

(modelo com intercepto). Determine o estimador de mínimos quadrados de  $\beta$  sob  $H_0$ .