$5^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE II - SME0801

Professora Juliana Cobre

Entregar Exercício 3

Exercício 1. Verifique que $X_n \stackrel{q.c.}{\to}$ com $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sendo uma sequência de variáveis aleatórias tais que $P(X_n = 1) = P(X_n = 3) = \frac{1}{n^2}$ e $P(X_n = 2) = 1 - \frac{2}{n^2}, \forall n \geq 1$.

Exercício 2. Mostre que se $X_n \stackrel{D}{\to} X$, então $aX_n + b \stackrel{D}{\to} aX + b$, para a e b constantes reais.

Exercício 3. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathrm{E}(X_1) = 0$ e $\sigma^2 = \mathrm{E}(X_1^2), 0 < \sigma^2 < \infty$. Determine o limite em distribuição das sequências $\{V_n\}_{n\geq 1}$ e $\{W_n\}_{n\geq 1}$, em que

$$V_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2}, n \geq 1 \quad \text{e} \quad W_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\left(\sum_{j=1}^n X_j^2\right)^{1/2}}, n \geq 1$$

Exercício 4. Sejam $X_n,\ n \geq 1$, variáveis aleatórias i.i.d. seguindo o modelo de Bernoulli com parâmetro $p = 0,4$. Determine um valor aproximado para $P(\sum_{j=1}^{100} X_j = 50)$.

Exercício 5. Suponha que retiramos, com reposição, 1000 cartas de um baralho com 52 cartas. Determine, de forma aproximada, a probabilidade de obtermos pelo menos 65, mas não mais de 90 azes, nessas retiradas.

Exercício 6. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média 0 e variância 1. Também seja $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $P(Y_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}$ e $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n^2}, n \geq 1$. Suponha X_n e Y_n independentes para todo $n \geq 1$. Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n (X_j + Y_j) \stackrel{D}{\to} N(0,1).$$

Exercício 7. Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ variáveis seguindo o modelo $B(n, p_n)$. Se $np_n = \lambda_n \to \lambda$ ($\lambda > 0$), quando $n \to \infty$, então $X_n \stackrel{D}{\to} X$, em que X é Poisson(λ).

Exercício 8. As variáveis $X_n, n \geq 1$, são independentes e todas têm distribuição Exponencial de parâmetro λ. Mostre que a sequência $\{X_n^2\}_{n\geq 1}$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.

Exercício 9. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função característica ϕ tal que $\phi'(0) = \mu$. Prove que $\bar{X} \stackrel{p}{\to} \mu$.

Exercício 10. Sejam $\{a_n, n \geq 1\}$ uma sequência de números reais, com $a_n \to a < \infty$. Se $X_n \stackrel{D}{\to} N(0,1)$, então $X_n + a_n \stackrel{D}{\to} N(a,1)$.

Exercício 11. Para $k \geq 1, X_k \sim Bernoulli(p_k)$ são variáveis aleatórias independentes. Defina Y_n como o número de sucessos, nas primeiras n realizações. Demonstre que

$$\frac{1}{n}\left(Y_n - \sum_{i=1}^n p_i\right) \stackrel{p}{\to} 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{n}\left(Y_n - \sum_{i=1}^n p_i\right) \stackrel{m.2}{\to} 0$$

Exercício 12. Considere $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com quarto momento finito e variância σ^2. Para uma amostra de tamanho n, seja $S^{*2} = \frac{n-1}{n}S^2$, em que $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Mostre que $S^{*2} \stackrel{p}{\to} \sigma^2$.

Exercício 13. Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas duas a duas com $P(X_n = -n) = P(X_n = n) = 1/2$. Prove que não vale a Lei Fraca dos Grandes Números, mas a sequência satisfaz o Teorema Central do Limite.

Exercício 14. Sejam $X_n, n \geq 1$, variáveis aleatórias i.i.d. com média 0 e variância igual a $\sigma^2, 0 < \sigma^2 < \infty$. A sequência $Y_n, n \geq 1$, também, é formada por variáveis independentes identicamente distribuídas, mas sua média é μ, $\mu < \infty$. Verifique que $\bar{Y} - \sqrt{n}\bar{X} \stackrel{D}{\to} N(\mu, \sigma^2)$.