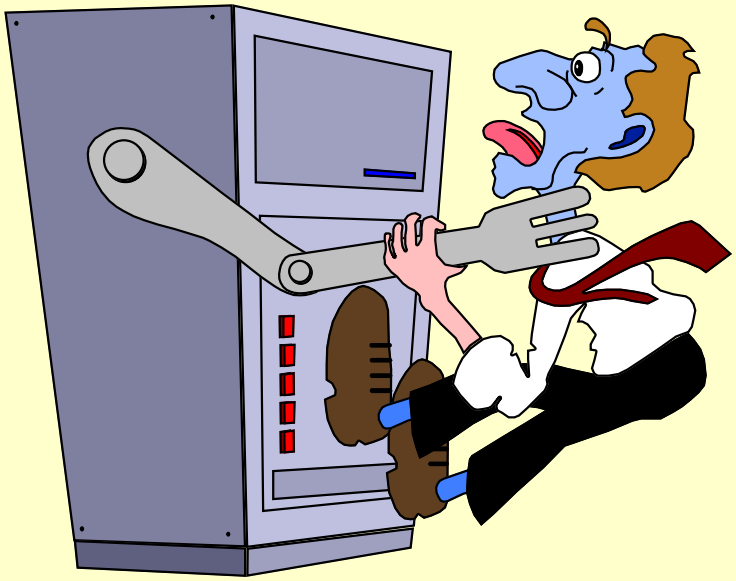
Máquinas de Turing



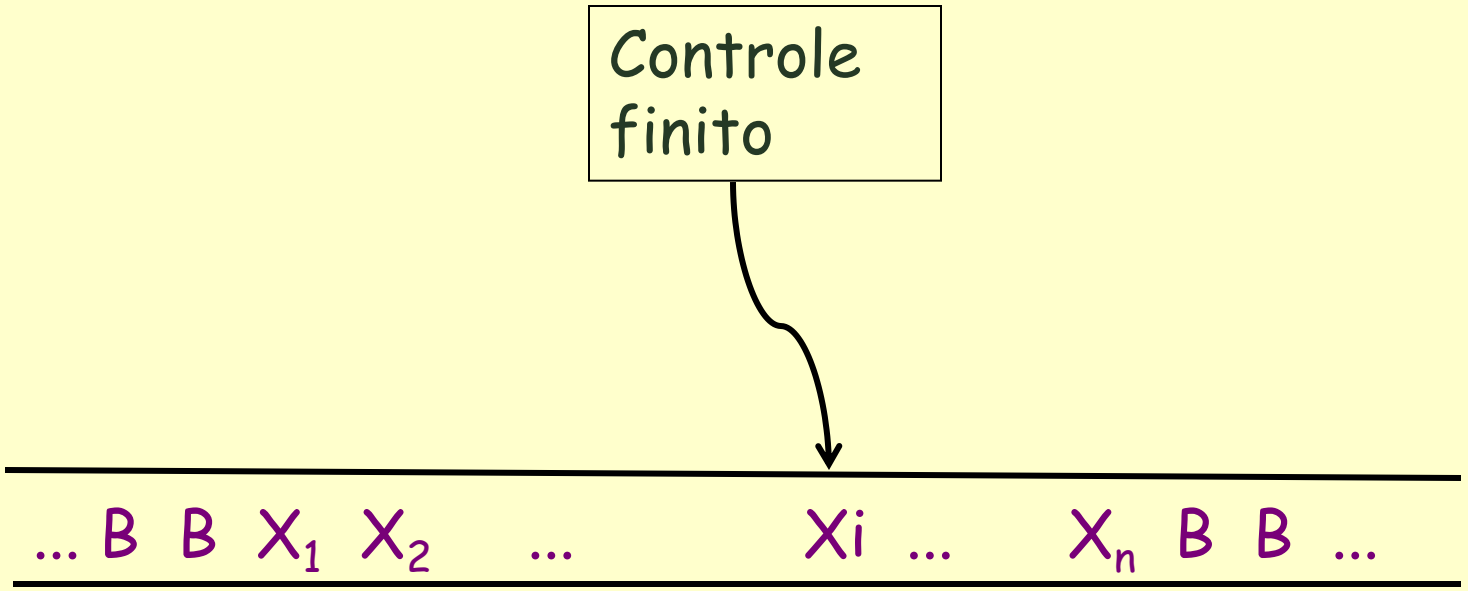
Máquinas de Turing podem fazer tudo o que um computador real faz.

Porém, mesmo uma Máquina de Turing não pode resolver certos problemas. Estes problemas estão além dos limites teóricos da computação

História

- Turing (1936): Máquinas de Turing como modelo de função computável.
- Tese de Church-Turing: qualquer modelo geral de computação permite calcular as mesmas funções (ou, tudo o que se pode computar coincide com as linguagens reconhecidas pelas Máquinas de Turing).

Máquina de Turing



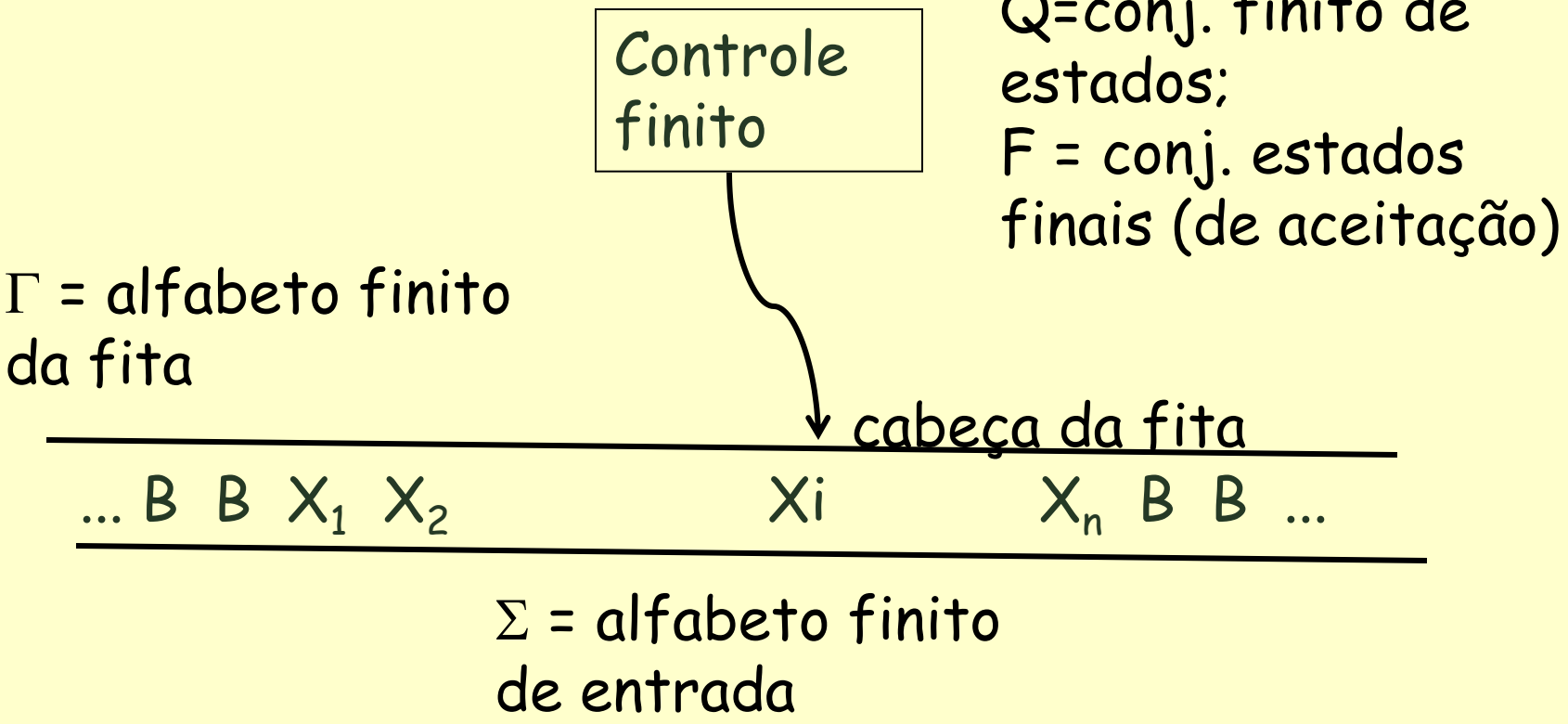
Inicialmente, a entrada é colocada na fita. Todas as outras células (infinitamente à esquerda e à direita) têm um símbolo especial da fita, B (*branco*).
A cabeça da fita fica posicionada em uma das células. No início, a cabeça está posicionada na célula mais à esquerda que contém a entrada.

Um *movimento* da MT é uma função do estado do controle finito e do símbolo atual da fita. Em um movimento, a MT:

1. Mudará de estado (opcionalmente para o mesmo).
2. Gravará um símbolo de fita na célula atual, substituindo o existente (podendo ser o mesmo).
3. Movimentará (necessariamente) a cabeça da fita uma célula à esquerda ou à direita.

MT: notação formal

M = (Q, Σ, Γ, δ, qo, F)



Máquina de Turing

Função de transição δ:

$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,R\}$

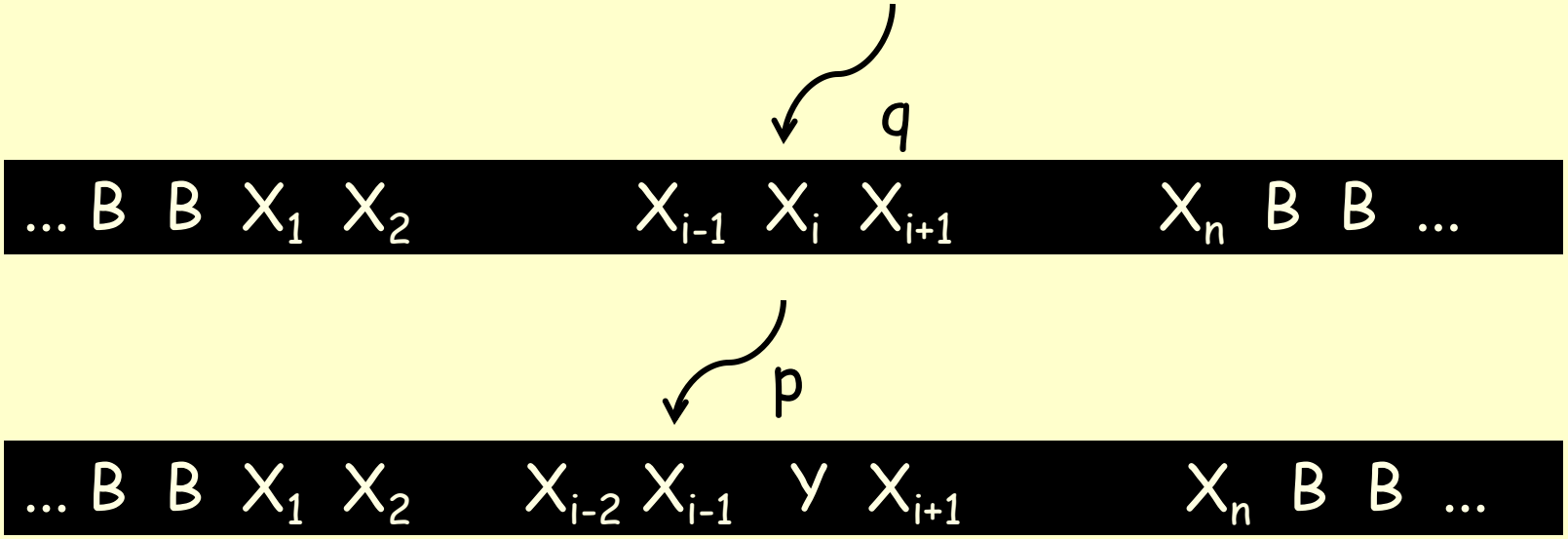
Ou seja, $\delta(q,X) = (p,Y,D)$ onde:

- p é o próximo estado em Q;
- Y é o símbolo que substituirá X na fita;
- D é uma direção (esquerda ou direita) em que a cabeça da fita irá se mover.

Descrições Instantâneas para MT

Suponha que $\delta(q,X_i) = (p,Y,L)$, ou seja, o movimento foi para a esquerda. Então:

$$X_1X_2....X_{i-1}qX_iX_{i+1}\ ...X_n \underset{M}{\vdash} X_1X_2....X_{i-2}pX_{i-1}YX_{i+1}...X_n$$



Duas exceções:

- Se i = 1, então M se move para o B à esquerda de X1. Nesse caso:

$$qX_1X_2 \ldots X_n \vdash pBYX_2 \ldots X_n$$

- Se i = n e Y = B, então o B gravado sobre X_n se junta ao sufixo de Bs e não aparece na próxima DI:

$$X_1X_2 \ldots X_{n-1}qX_n \vdash X_1X_2 \ldots X_{n-2}pX_{n-1}$$

Agora suponha que $\delta(q,X_i) = (p,Y,R)$, ou seja, o movimento foi para a direita. Então:

$$X_1X_2....X_{i-1}qX_iX_{i+1}\ ...X_n \underset{M}{\vdash} X_1X_2....X_{i-1}YpX_{i+1}...X_n$$

Duas exceções:

- Se i = n, então a (i+1)-ésima célula contém um B e ela não faz parte da DI anterior. Nesse caso:

  $$X_1X_2\ ...X_{n-1}qX_n \vdash X_1X_2\ ...\ X_{n-1}YpB$$

- Se i = 1 e Y = B, então o B gravado sobre X1 se junta ao prefixo de Bs e não aparece na próxima DI:

  $$qX_1X_2\ ...X_n \vdash pX_2\ ...\ X_n$$

Exemplo

Vamos projetar uma MT para reconhecer

$$L = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$$

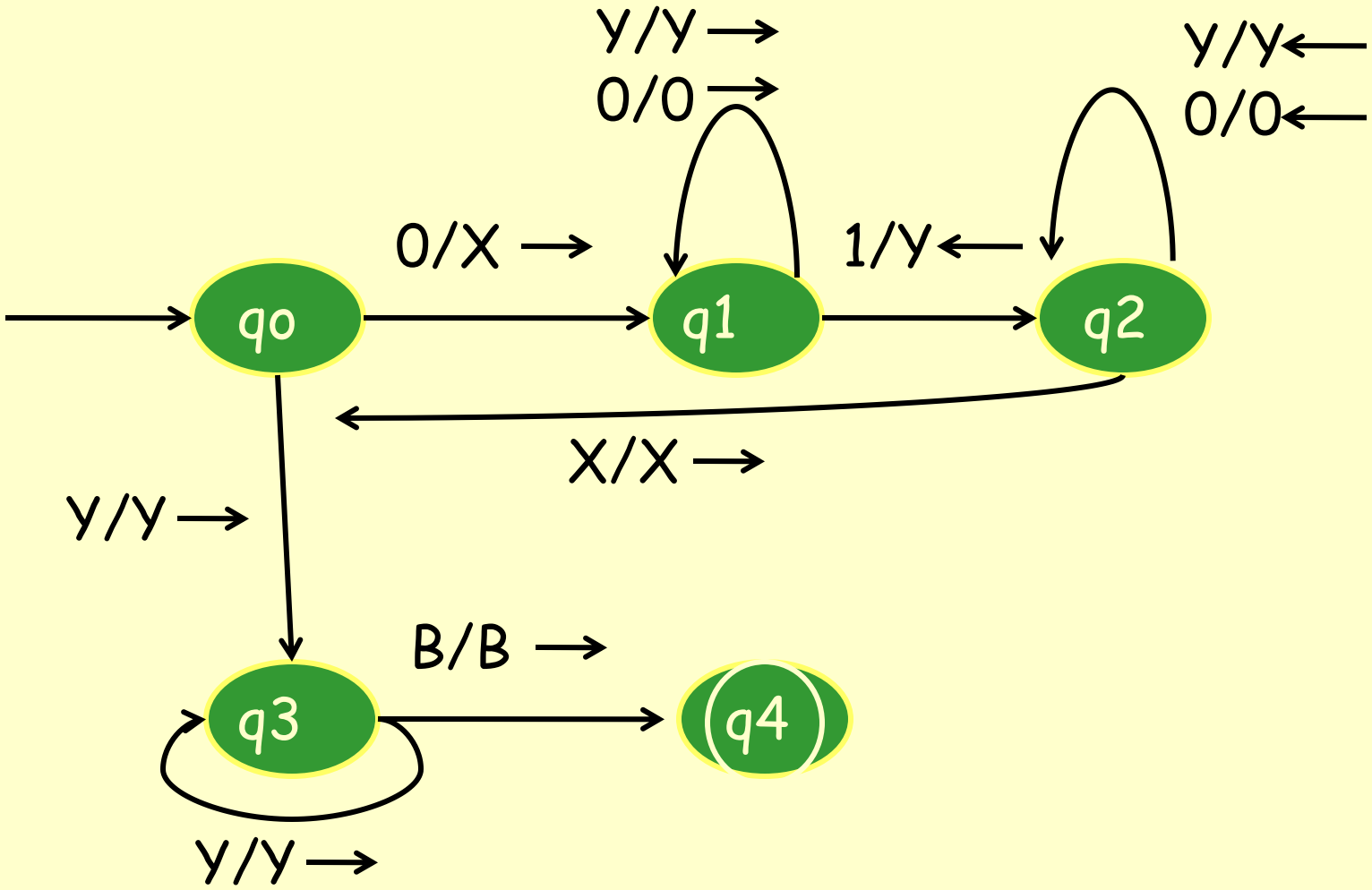
- Estratégia: a MT trocará um 0 por um X, e depois um 1 por um Y, até todos os 0s e 1s terem sido comparados.
- Em cada passo, da esq. para dir., ela troca um 0 por X e vai para a direita, ignorando 0s e Ys até encontrar 1. Troca esse 1 por Y e se move para a esquerda, ignorando Ys e 0s, até encontrar um X. Procura um 0 a direita e troca por X, repetindo o processo.
- Se a entrada não estiver em 0^n1^n eventualmente a MT não vai ter um movimento previsto e vai parar sem aceitar.
- Se, por outro lado, na busca por mais um 0, ela só encontrar Xs e Ys, então ela descobre que deve aceitar a entrada.

$M = (\{q0,q1,q2,q3,q4\}, \{0,1\}, \{0,1,X,Y,B\}, \delta, q0, \{q4\})$

Estado	0	1	X	Y	B
→ q0	(q1,X,R)	--	--	(q3,Y,R)	--
q1	(q1,0,R)	(q2,Y,L)	--	(q1,Y,R)	--
q2	(q2,0,L)	--	(q0,X,R)	(q2,Y,L)	--
q3	--	--	--	(q3,Y,R)	(q4,B,R)
q4*	--	--	--	--	--

Verifique se a cadeia 000111 é aceita

Diagrama de Transição



Exercício

- Construa uma MT para reconhecer cadeias de $L=\{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Estágios para a resolução:

- Verifique (zigue-zague) se antes e depois do # existem os mesmos símbolos, cc rejeite. Ao checar um símbolo marque-o (use um X por exemplo) para ter controle sobre os que estão sendo analisados num dado momento.
- Quando todos os da esquerda forem checados (com X) verifique se existe algum símbolo à direita ainda não checado. Se houver, rejeite; cc aceite.

A linguagem de uma MT

- Intuitivamente: a cadeia de entrada é colocada na fita, e a cabeça da fita começa no símbolo mais à esquerda da cadeia. Se a MT entrar eventualmente num estado de aceitação, a entrada será aceita; caso contrário, não.
- Formalmente: seja M = (Q, Σ, Γ, δ, qo, F) uma MT. Então L(M) é o conjunto de cadeias w em Σ^* tais que $q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$ para algum estado p em F e quaisquer cadeias de fita α e β. (aceitação por estado final)

A linguagem de uma MT

- As linguagens aceitas por MT são também chamadas de *linguagens recursivamente enumeráveis (LREs)*
- As gramáticas que geram as LREs são as Gramáticas Irrestritas ou com Estrutura de Frase ou do Tipo 0:
  - Aquelas cujas regras de produção são do tipo:

$$\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha \in (Vn \cup Vt)^{+}; \quad \beta \in V^{*}$$

  - Não há restrições nas regras de produção.

MT e sua parada

- Há uma outra noção de "aceitação" para MT: a aceitação por parada. Em geral, usada quando o conteúdo final da fita representa alguma resposta ao problema que a MT representa.

- Dizemos que uma MT *para* se ela entra em um estado q, olhando um símbolo de fita X, e não existe mais nenhum movimento previsto nessa situação, i.e., $\delta(q,X)$ é indefinido.

Usos de uma MT

- como reconhecedor de linguagens (Visto)

- para calcular funções

MT como um processador de funções inteiras

- Tradicionalmente, os inteiros são representados em vocabulário unário.
- O inteiro i >= 0 é representado pela cadeia 0^i.
- Se a função tem k argumentos (i1, i2, ..., ik) então esses inteiros são colocados na fita separados por 1´s como:

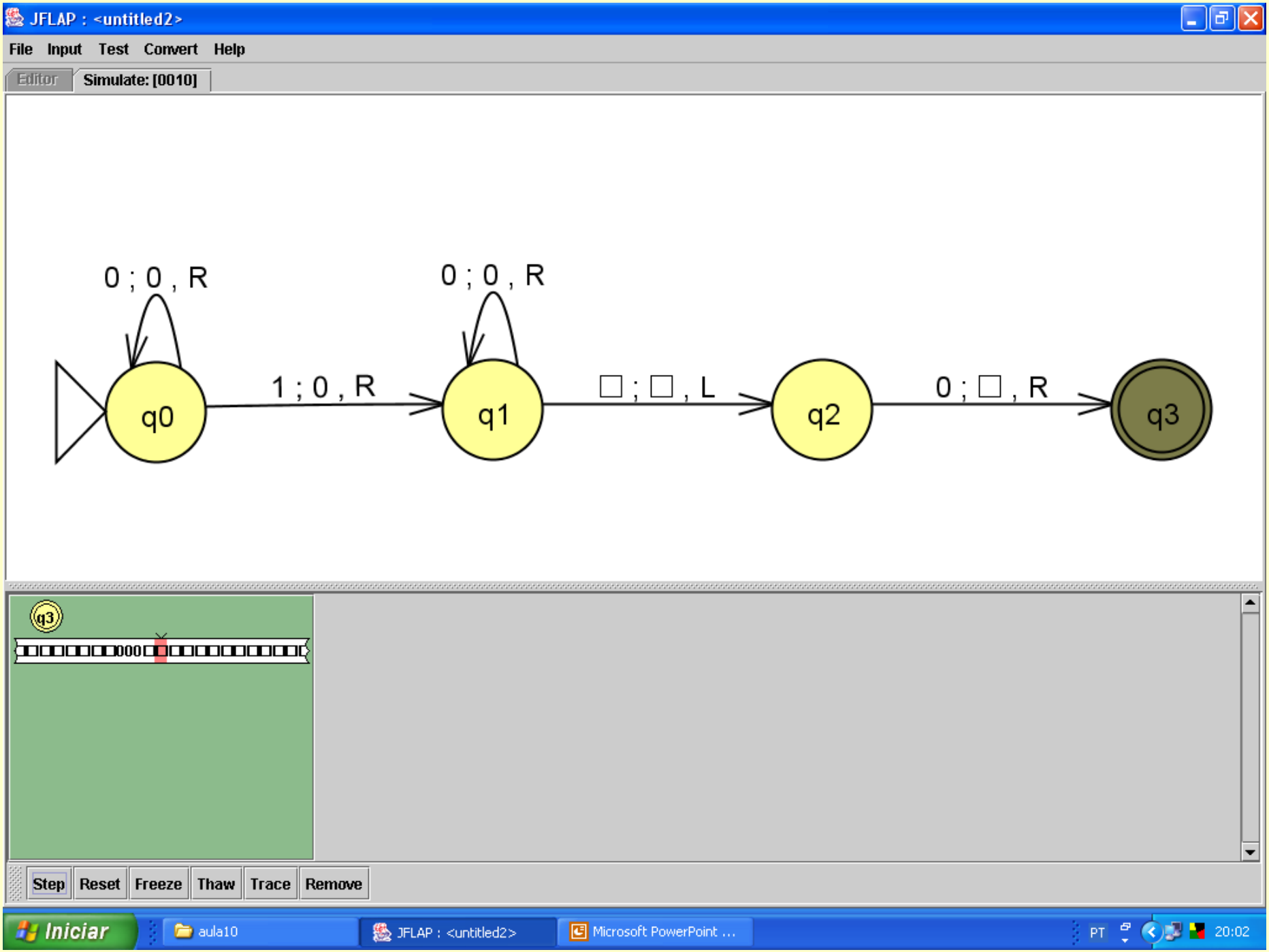
$$0^{i1}\ 1\ 0^{i2}\ 1\ \ldots\ 1\ 0^{ik}$$

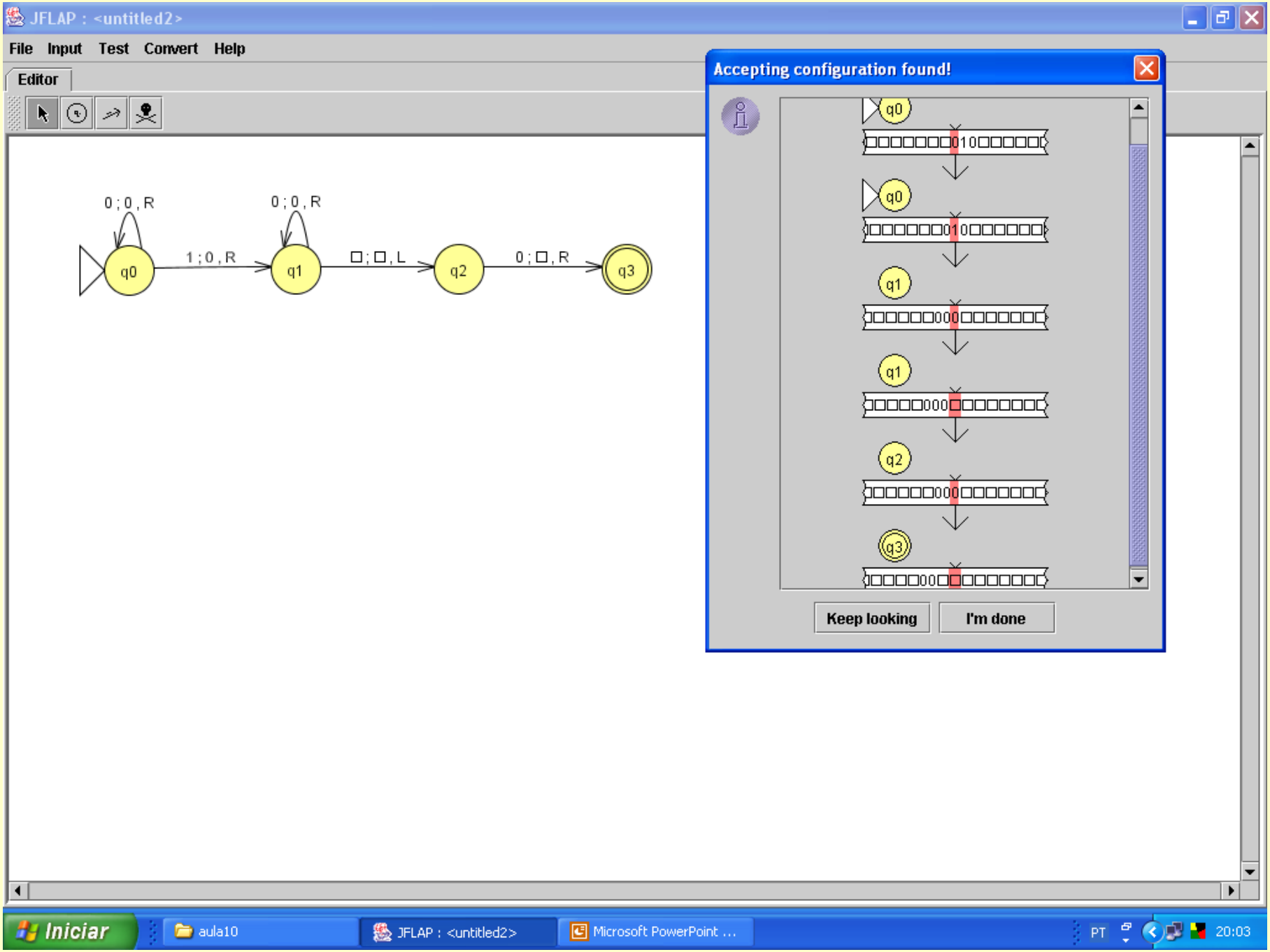
- O inverso também é possível.
- Se a máquina para (não importa se num estado final) com a fita consistindo de 0^m para algum m então dizemos que f(i1,i2,...ik) = m, onde f é uma função de k argumentos computados por essa MT.

Exemplo: MT que soma dois números naturais

- Conteúdo inicial da Fita: ...B 0^a 1 0^b B...
- Quando a MT parar, o conteúdo da fita dever ser:
  ...B 0^{a+b} B....

- Processo:
- Ler o 0 mais à esquerda, mantendo-o como 0, e mover à direita até encontrar o 1.
- Substitua o 1 por 0 (nesse momento a cadeia da fita é 0^{a+b+1}). Continue movendo à direita sem mudar a fita, até que um B seja encontrado.
- Mantenha o B e mova à esquerda para encontrar o último 0 mais a direita.
- Substitua esse 0 por B. O resultado é 0^{a+b}


JFLAP : <untitled2>
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: [0010]
0 ; 0 , R
0 ; 0 , R
1 ; 0 , R
□ ; □ , L
0 ; □ , R
q0
q1
q2
q3
q3
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
aula10
JFLAP : <untitled2>
Microsoft PowerPoint ...
PT
20:02


JFLAP : <untitled2>
File Input Test Convert Help
Editor
0 ; 0 , R
0 ; 0 , R
1 ; 0 , R
□ ; □ , L
0 ; □ , R
q0
q1
q2
q3
Accepting configuration found!
Keep looking
I'm done
Iniciar
aula10
JFLAP : <untitled2>
Microsoft PowerPoint ...
PT
20:03

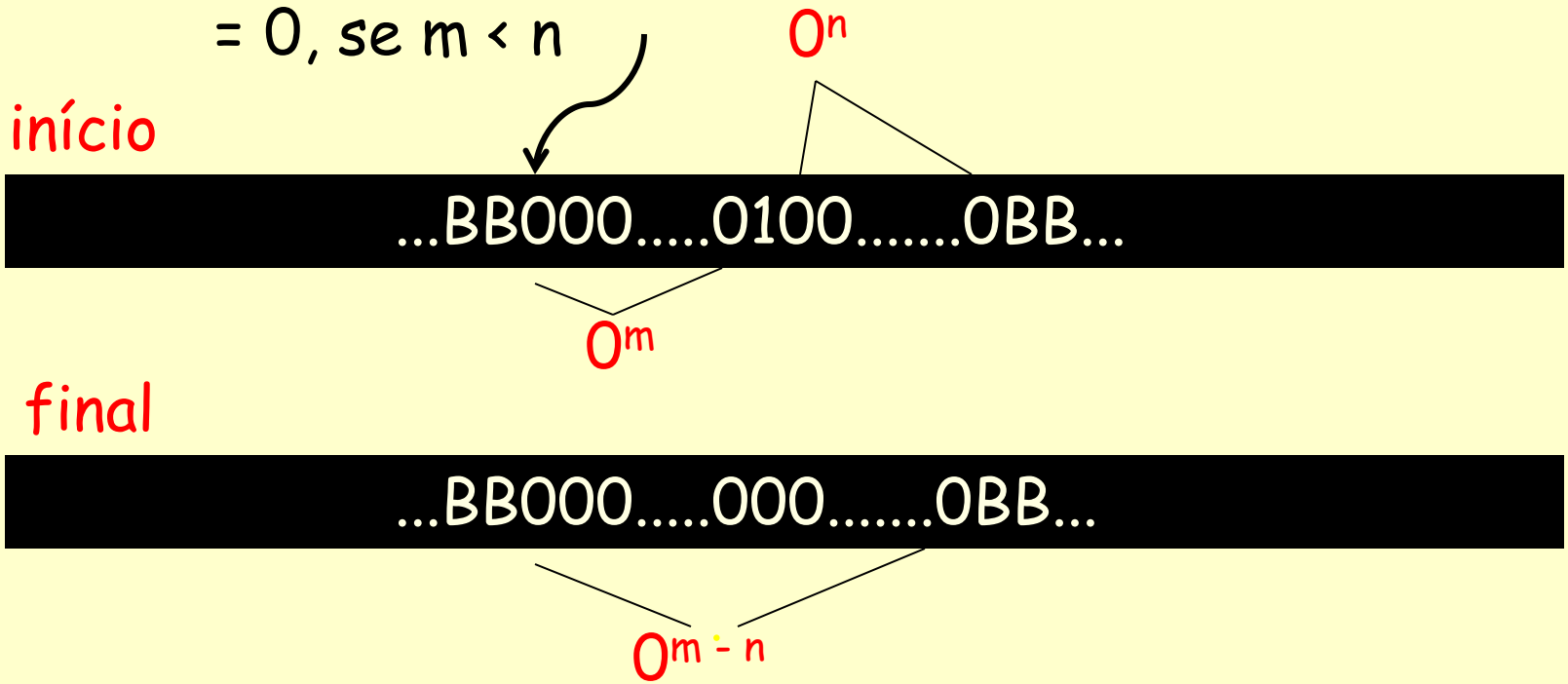
Exercício

- Projete uma MT que calcule, para dois inteiros positivos m e n, m ∸ n, chamada *monus* ou *subtração própria*, e definida por:

m ∸ n = max(m-n,0). Isto é,

m ∸ n = m-n, se m ≥ n

= 0, se m < n



- F é vazio se a MT é transformadora de uma cadeia de entrada em uma cadeia de saída, isto é, como um modelo para descrever procedimentos (ou computar funções).

- F é relevante quando a MT é usada para reconhecer uma linguagem.

Exercícios

1) Construir uma MT que decida se uma sequência de parênteses é bem formada.
   - Escreve 0 se mal formada
   - Escreve 1 se bem formada

- Dica: considere que a cadeia de parênteses é limitada por 2 A´s (um a esq e outra à direita).
- Ideia: Procurem por um) e substitua por X e em seguida voltar a esquerda procurando o (mais próximo para substituir por X também.

2) Construir uma MT tal que, dada uma cadeia w pertencente ao fecho de {0,1}, duplique w. Quando a máquina parar, a fita deve conter w#w sendo que # indica fim de w.

Exercícios

3. Faça uma MT que reconheça L = {0^2^n | n >= 0} cadeias de 0 cujo tamanho é potência de 2

4. Faça uma MT que reconheça L = {x | x $\in$ {a,b,c}* e x é uma permutação de $a^n b^n c^n$ para algum n >= 0 }

ex. aabbcc bca cccaaabbb

Comentários sobre os Exercícios

4: (Na verdade, um ALL)

a) trocar um a,b, ou c do começo por 1 para marcar o final à esquerda;

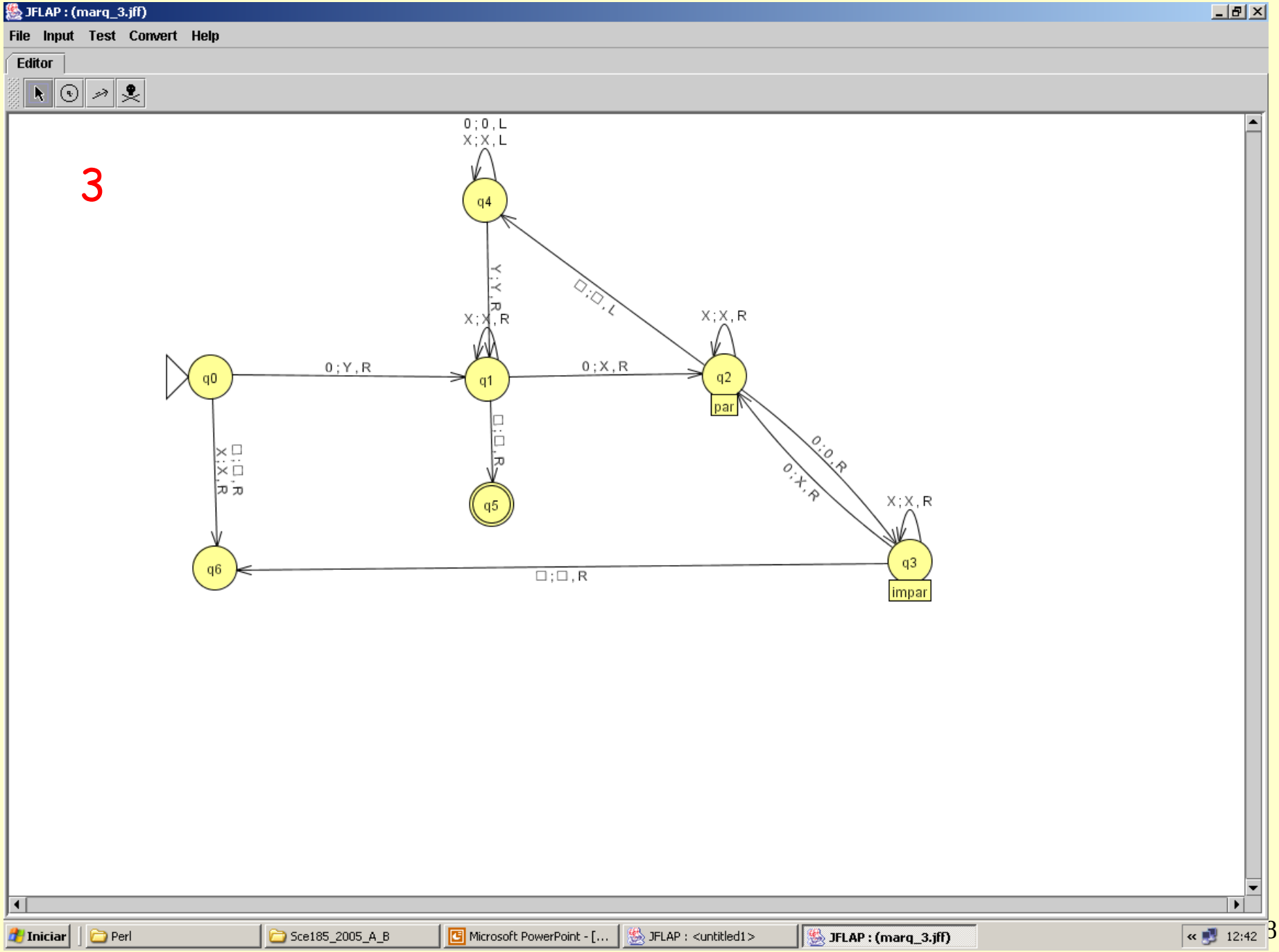
b) substituir um a, um b e um c por 0´s.

c) M aceita se, ao percorrer a cadeia de entrada, a fita consiste somente de 0´s.

Comentários sobre os Exercícios

3: estágios para a resolução:

0. Marque o primeiro zero com Y
1. Atravesse da esquerda para direita marcando um zero sim outro não com um X
2. Se a fita contiver 1 único 0, aceite. Se contiver mais do que 1 zero e o número for ímpar, rejeite.
3. Retorne ao marcador Y
4. Recomece no estágio 1.


JFLAP : (marq_3.jff)
File Input Test Convert Help
Editor
3
0 ; 0 , L
X ; X , L
q4
Y ; Y , R
X ; X , R
□ ; □ , L
X ; X , R
q0
0 ; Y , R
q1
0 ; X , R
q2
par
□ ; □ , R
X ; X , R
0 ; 0 , R
0 ; X , R
X ; X , R
q5
q6
□ ; □ , R
q3
impar
Iniciar
Perl
Sce185_2005_A_B
Microsoft PowerPoint - [...
JFLAP : <untitled1>
JFLAP : (marq_3.jff)
12:42

Máquinas de Turing: Poder Computacional e Teoremas

- A fim de demonstrar, empiricamente, o poder computacional das MT, existem técnicas de combinação e extensão das MT. Dessa forma, o modelo de Turing vai ganhando recursos que facilitam a construção de MT para funções mais complexas.

- O ponto importante, no entanto, é que todas essas extensões comprovadamente NÃO alteram o conjunto de funções computáveis por MT.
- Isto é, o poder computacional das MT permanece inalterado com o acréscimo de todos esses recursos.
- Isso traz evidências para a Tese de Church-Turing: *uma função é computável se e somente se ela for MT-computável.*

Técnicas de Extensão de MT

- Permitir armazenamento no controle finito
- Permitir que a fita tenha várias trilhas;
- Permitir várias fitas e cabeças de leitura/escrita;
- Permitir não-determinismo na definição de δ;
- Permitir a combinação de quaisquer extensões acima.

Armazenamento no controle finito

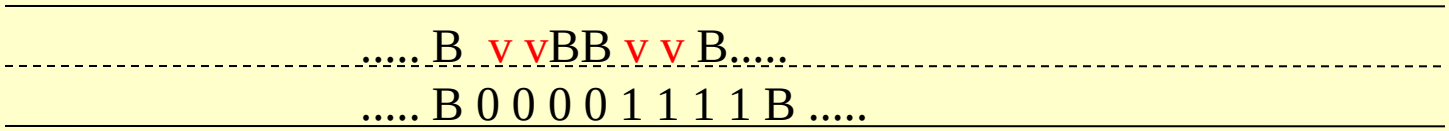
- Uma quantidade finita de informação pode ser armazenada no controle finito.
- Podemos pensar na MT como tendo um nro. fixo de registradores X1, X2, ...Xn, cada um com um nro. fixo de bits.
- a cada movimento, tanto lendo quanto escrevendo na fita, a MT pode ler e escrever um registrador.

Armazenamento no controle finito

- Ex.: quando se quer comparar 2 cadeias x e y, símbolo a símbolo, devemos "lembrar" do símbolo atual da cadeia que está sendo verificada, x, até deslocarmos a cabeça até o símbolo correspondente de y. Essa "lembrança" pode se dar na forma de um registrador.
- Repare que essa "memória" pode ser simulada por meio de diferentes estados.

Fita com múltiplas trilhas

- Considere a MT que reconhece $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$, onde trocávamos 0 por X e 1 por Y.
- Podemos pensar na fita contendo 2 trilhas:



- A inferior contém 0, 1 e B; a superior contém B ou v.
- Podemos generalizar para permitir qualquer conjunto finito de símbolos.

Fita com múltiplas trilhas

- Assim, uma dada MT com um número fixo n de trilhas em sua fita, para $1 \leq i \leq n$, a i-ésima trilha terá seu próprio alfabeto A_i ($B \in A_i$).
- Um subconjunto de trilhas será de entrada, e possivelmente um subconjunto será de saída.
- Se a i-ésima trilha é de entrada, então ela terá seu próprio alfabeto, V_i, tal que $V_i \subseteq A_i$ e $B \notin V_i$.
- A entrada (conj. ordenado de cadeias) é colocada nas trilhas de entrada e, se a máquina parar, a saída é o conjunto ordenado de cadeias obtidas nas trilhas de saída.

Fita com múltiplas trilhas

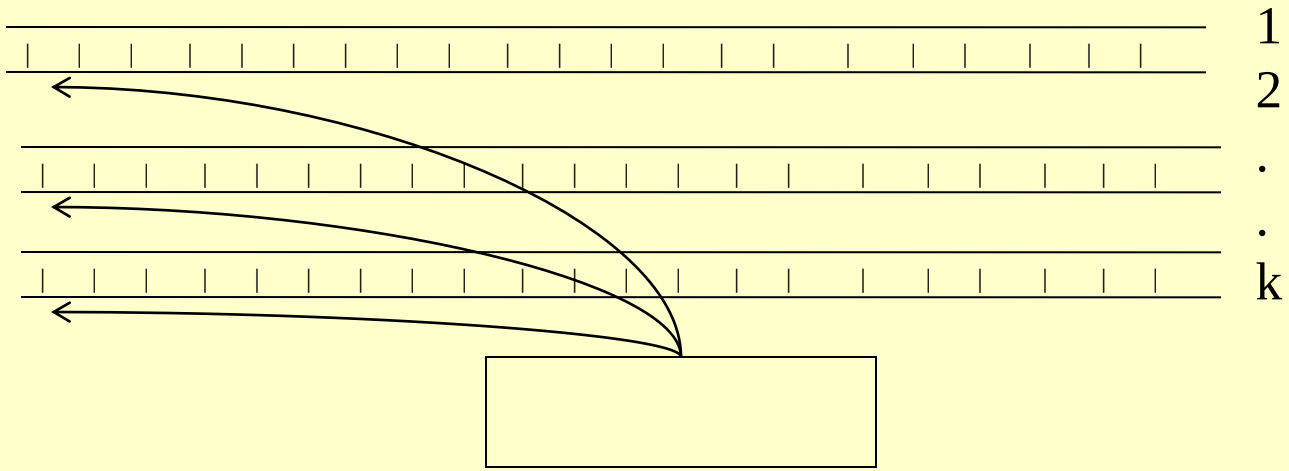
- A cada estado da máquina está associado um subconjunto não vazio de trilhas.
- A ideia é que, se o estado s está associado a um subconjunto de k trilhas, quando a MT está no estado s, ela lê uma k-upla de símbolos dessas trilhas e substitui esses símbolos por outra k-upla. As outras trilhas não são alteradas. Se não especificarmos um subconjnto para s, então s fica associado a todas as n trilhas.
- Se forem reconhecedoras, é necessário especificar o subconjunto F, de estados finais.

Subrotinas

- Subrotinas podem ser simuladas por MT com memória no controle finito e múltilhas trilhas na fita.
- O estado de retorno pode ser "lembrado" no controle finito e a célula da fita para a qual irá retornar pode ser marcada numa trilha.
- As trilhas fariam o papel de memória em separado, onde seriam executadas as ações da subrotina, sem conflitar com o "status do programa principal".

Máquinas com Múltiplas Fitas

- **Def**. Uma MT com k fitas consiste de um controle finito e k fitas de trabalho, cada uma conectada com o controle finito por meio de uma cabeça de fita.
- A função de transição para esta máquina, com base no estado atual, escolhe uma fita para ler, escrever e mover à esquerda ou à direita desta fita.
- Assim como antes, a máquina pára quando sua função de transição for indefinida.



Máquinas com Múltiplas Fitas

- A entrada para a MT é colocada em algumas fitas, designadas de entrada; e a saída, se houver, é obtida de algumas fitas designadas de saída.
- Se a MT for reconhecedora, um subconjunto de estados é designado como final.

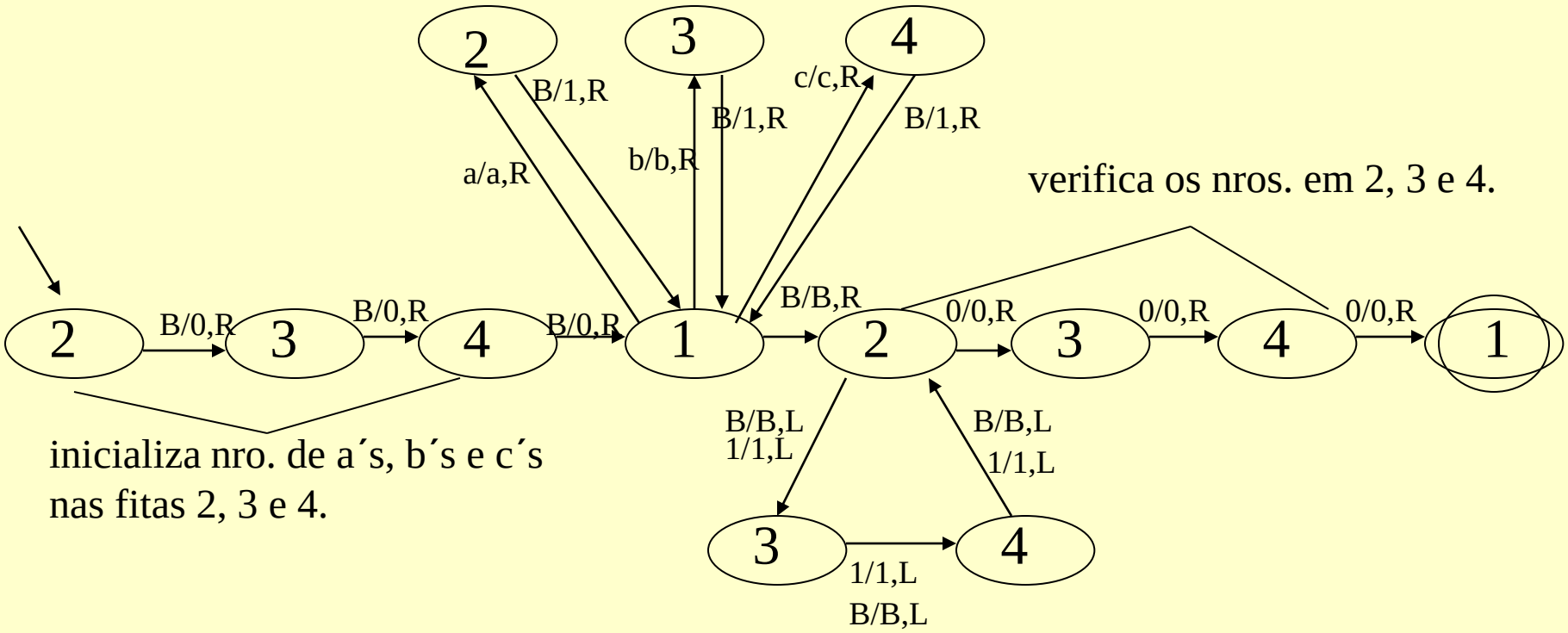
- Exemplo: uma MT de 4 fitas que reconhece

  $\{x \mid x \text{ é uma permutação de } a^n b^n c^n \; n \geq 0\}$

- **Processo:** usar fita 1 como entrada; a MT conta o número de a´s, b´s e c´s e os coloca nas fitas 2, 3 e 4 respectivamente, representados por cadeias de 1´s, limitadas à esquerda por um 0.

a b a c c b	**Fita 1 (entrada)**
0 1 1	**Fita 2 (# a)**
0 1 1	**Fita 3 (# b)**
0 1 1	**Fita 4 (# c)**

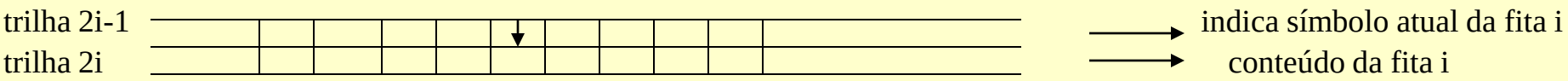
Diagrama de transição: como anterior, e o número da fita substitui o nome do estado.



Teorema

Toda função computável por uma MT com k fitas é computável por uma MT de uma fita.

Prova: mostrar como simular qualquer MT de múltiplas fitas numa MT de fita única com 2k trilhas.



As MT com k fitas são polinomialmente equivalentes às MT com uma fita.

MT Não Determinísticas

- Uma MTND difere da determinística pelo fato de que, para cada estado q e símbolo de fita X, $\delta(q, X)$ é um conjunto de triplas $\{(q_1,Y_1,D_1),...(q_k,Y_k,D_k)\}$

- A linguagem aceita por uma MTND é dada pelo conjunto de cadeias para as quais haja ao menos uma sequência de escolhas de movimentos que leve da DI inicial a uma DI com um estado final.

- **Teorema:** Se M_N é uma MTND, então existe uma MT determinística M_D tal que $L(M_N) = L(M_D)$.

- Ou seja, as MTND não aceitam nenhuma linguagem não aceita por uma MTD.
- As MTND são equivalentes às MTD porém com uma perda exponencial de eficiência.

MT e os Computadores

- Aceitam o mesmo conjunto de linguagens – as linguagens recursivamente enumeráveis.
- Mostra-se isso simulando-se uma MT por um programa de computador (fácil) e simulando-se um computador por uma MT (de várias fitas – cada fita um recurso: memória, contador de instruções, arquivo de E/S, etc.).

Tempos de Execução

- A questão do tempo de execução é importante, pois a MT é usada não apenas para determinar o que pode ser calculado, mas o que pode ser calculado com eficiência suficiente para ser usado na prática.
- A linha divisória entre os problemas ***tratáveis*** (computados com eficiência) e os ***intratáveis*** (computados, mas em tempo inaceitável) em geral é considerada entre o que pode ser calculado em tempo polinomial e o que exige mais que qualquer tempo de execução polinomial (p.ex. eponencial, fatorial).

Tempos de Execução

- Se um problema pode ser resolvido em tempo polinomial em um computador típico, então ele pode ser resolvido em tempo polinomial por uma MT e vice-versa.
- Devido a essa equivalência polinomial, tudo o que se conclui sobre o que uma MT pode ou não pode fazer com eficiência adequada se aplica igualmente bem a um computador.

Hierarquia das Classes de Máquinas e Linguagens