Automatos Finitos

Minimização de AFD

AFD equivalente, com o menor número de estados possível

Minimização de um AF (Menezes, 2002)

Def: Um autômato mínimo de uma LR é um AFD com um número X de estados tal que qualquer outro AFD que aceita a mesma linguagem terá um número de estados maior ou igual a X.

- **Algoritmo de minimização**
  - unifica os estados equivalentes
- **Def: Estados Equivalentes**

  $M = (\Sigma, Q, \delta, q0, F)$ AFD qualquer
- q e p de Q são Estados Equivalentes sse, para qualquer $w \in \Sigma^*$

$$\delta(q, w) \text{ e } \delta(p, w)$$

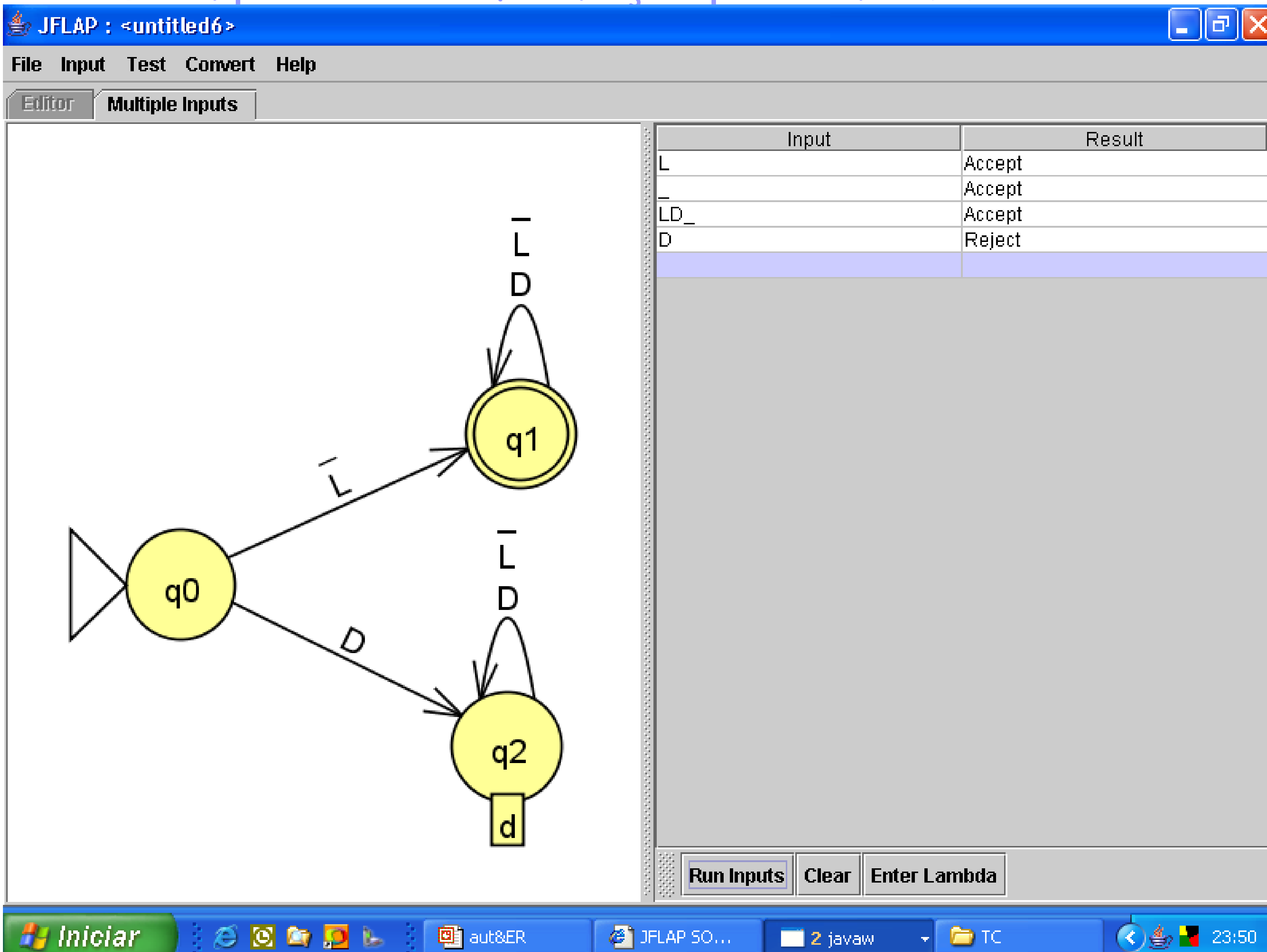
- resultam simultaneamente em estados finais, ou não-finais

Pré-requisitos para um AF ser minimizado:

a) Ser determinístico
b) Não pode ter estados inacessíveis (JFLAP aceita, pois elimina os tais)
c) δ deve ser total (qq estado deve possuir transições para todos os elementos do alfabeto de entrada). Deve ser um AFD no senso estrito. (JFLAP aceita, e completa as entradas)

- Caso o AF não possua algum dos requisitos acima é necessário:
  - gerar um AFD equivalente usando a teoria vista em sala.
  - eliminar estados inacessíveis (e transições).
  - No caso do item c) devemos:
    - incluir um novo estado não-final d
    - incluir as transições não previstas tendo d como destino
    - e incluir um ciclo em d para todos os símbolos de Σ.

Exemplo de transformação para um AFD estrito



Algoritmo de minimização

- Identifica os estados equivalentes por exclusão.
- A partir de uma tabela de estados, são marcados os não-equivalentes.
- Ao final do algoritmo, os itens não-marcados representam os estados equivalentes.

	q1					
	q2					
	...					
	qn					
inútil	d					
		q0	q1	...	qn-1	qn

Passos do Algoritmo

Passo 1: Construção da Tabela: relaciona estados distintos

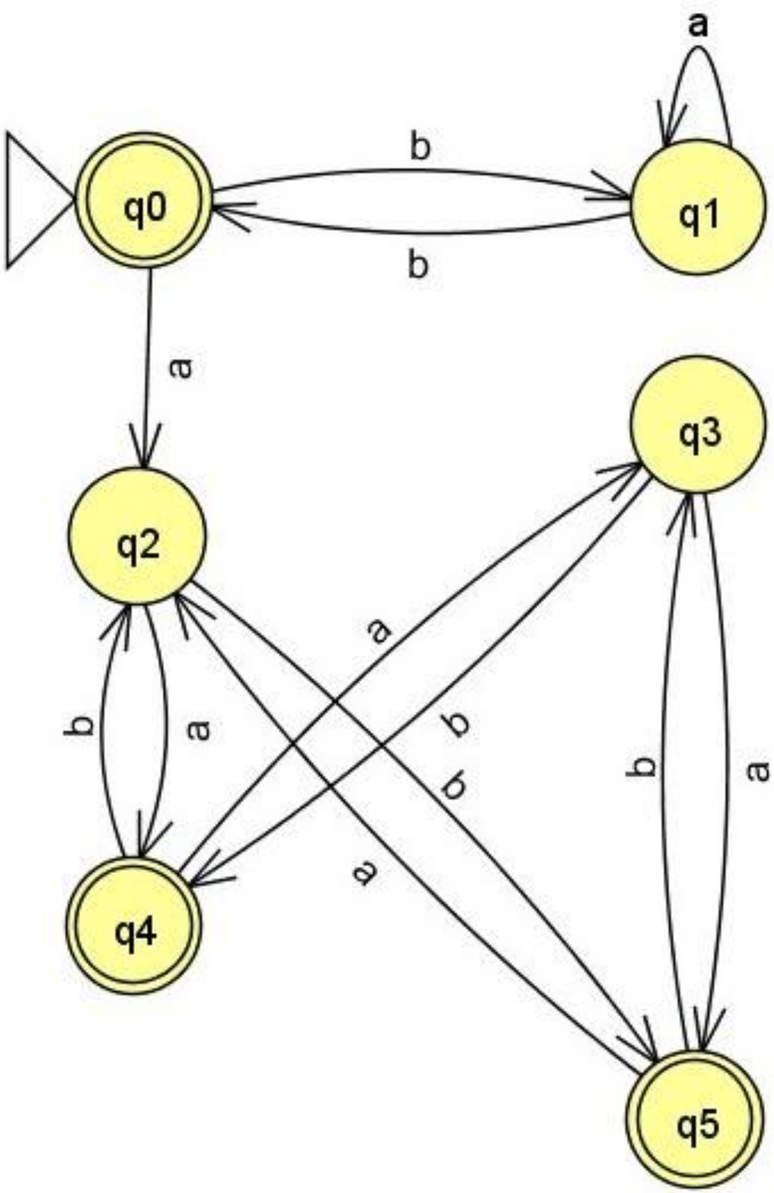
Passo 2: Marcação dos Estados Trivialmente Não-Equivalentes

Passo 3: Marcação dos Estados Não-Equivalentes

Passo 4: Unificação dos Estados Equivalentes

Passo 5: Exclusão dos Estados Inúteis

Autômato a ser minimizado



Satisfaz os pré-requisitos de minimização?

a) Ser determinístico
b) Não pode ter estados inacessíveis
c) δ deve ser total

1) Construir a tabela com cada par de estados ocorrendo 1 vez

q1					
q2					
q3					
q4					
q5					
	q0	q1	q2	q3	q4

2) Marcar estados **trivialmente** não-equivalentes {estado final, estado não-final}

q1	X				
q2	X				
q3	X				
q4		X	X	X	
q5		X	X	X	
	q0	q1	q2	q3	q4

3) Marcar estados não-equivalentes

- Para cada par {qu,qv} não-marcado e para cada símbolo a $\in \Sigma$, suponha que
  - δ(qu,a) = pu e
  - δ(qv,a) = pv
- Se pu = pv, então qu é equivalente a qv para o símbolo a e não deve ser marcado
- Se pu <> pv e o par {pu,pv} não está marcado, então {qu,qv} é incluído em uma lista a partir de {pu,pv} para análise posterior
- Se pu <> pv e o par {pu,pv} está marcado, então marcar todos os pares da lista (e, recursivamente se algum par da lista encabeça outra lista)

Usamos (+) para marcar os pares desta etapa

1) {q0,q4}: $\delta(q0,a) = q2$ $\delta(q0,b) = q1$

$\delta(q4,a) = q3$ $\delta(q4,b) = q2$

Como {q1,q2} e {q2,q3} são não-marcados, então {q0,q4} é incluído nas listas encabeçadas por {q1,q2} e {q2,q3}

2) {q0,q5}: $\delta(q0,a) = q2$ $\delta(q0,b) = q1$

$\delta(q5,a) = q2$ $\delta(q5,b) = q3$

Como {q1,q3} é não-marcado (e {q2,q2} é triv. eq.) então {q0,q5} é incluído na lista encabeçada por {q1,q3}

q1	X				
q2	X	(+)			
q3	X				
q4	(+)	X	X	X	
q5		X	X	X	
	q0	q1	q2	q3	q4

{q0,q5}

{q0,q4}

{q0,q4}

3) {q1,q2}: $\delta(q1,a) = q1$ $\delta(q1,b) = q0$

$\delta(q2,a) = q4$ $\delta(q2,b) = q5$

Como {q1,q4} é marcado então {q1,q2} também é marcado. Como {q1,q2} encabeça uma lista, o par {q0,q4} também é marcado

4) {q1,q3}: δ(q1,a) = q1 δ(q1,b) = q0

δ(q3,a) = q5 δ(q3,b) = q4

Como {q1,q5} e {q0,q4} são marcados, então {q1,q3} também é marcado. Como {q1,q3} encabeça uma lista, {q0,q5} também é marcado

5) {q2,q3}: δ(q2,a) = q4 δ(q2,b) = q5

δ(q3,a) = q5 δ(q3,b) = q4

Como {q4,q5} é não-marcado então {q2,q3} é incluído na lista encabeçada por {q4,q5}

q1	X				
q2	X	(+)			
q3	X	(+)			
q4	(+)	X	X	X	
q5	(+)	X	X	X	
	q0	q1	q2	q3	q4

{q0,q5}

{q0,q4}

{q0,q4} {q4,q5}

{q2,q3}

6) {q4,q5}: δ(q4,a) = q3 δ(q4,b) = q2

δ(q5,a) = q2 δ(q5,b) = q3

Como {q2,q3} é não-marcado então {q4,q5} é incluído na lista encabeçada por {q2,q3}

4) Unificações

- Como os pares {q2,q3} e {q4,q5} são não marcados, as seguintes unificações podem ser feitas:
  - q23 representa a unificação dos estados não-finais q2 e q3
  - q45 representa a unificação dos estados finais q4 e q5
- O autômato mínimo possui 4 estados.
- Teo 2.28 (Menezes, 2002) O AFD mínimo de uma linguagem é único, a menos de isomorfismo.

Passo 5: Exclusão dos Estados Inúteis

q é um estado inútil

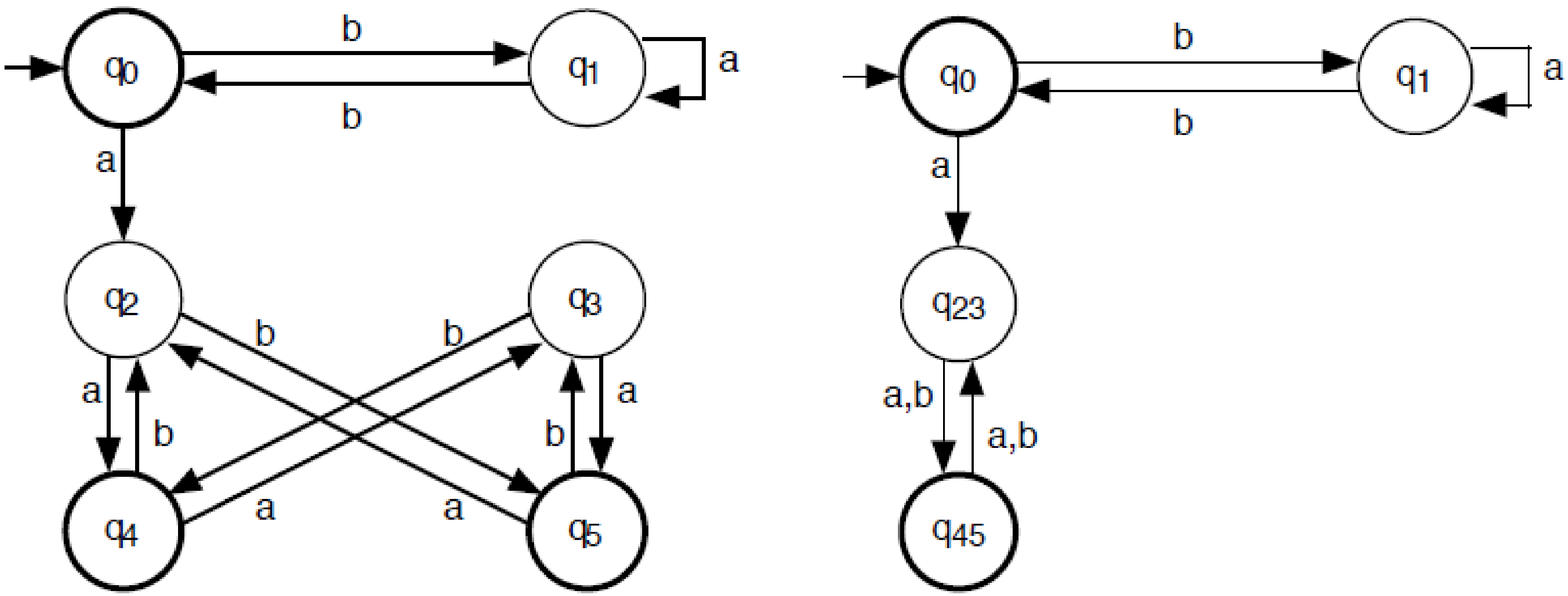
- não-final
- a partir de q não é possível atingir um estado final
- d (se incluído) é inútil

Transições com origem ou destino em estado inútil

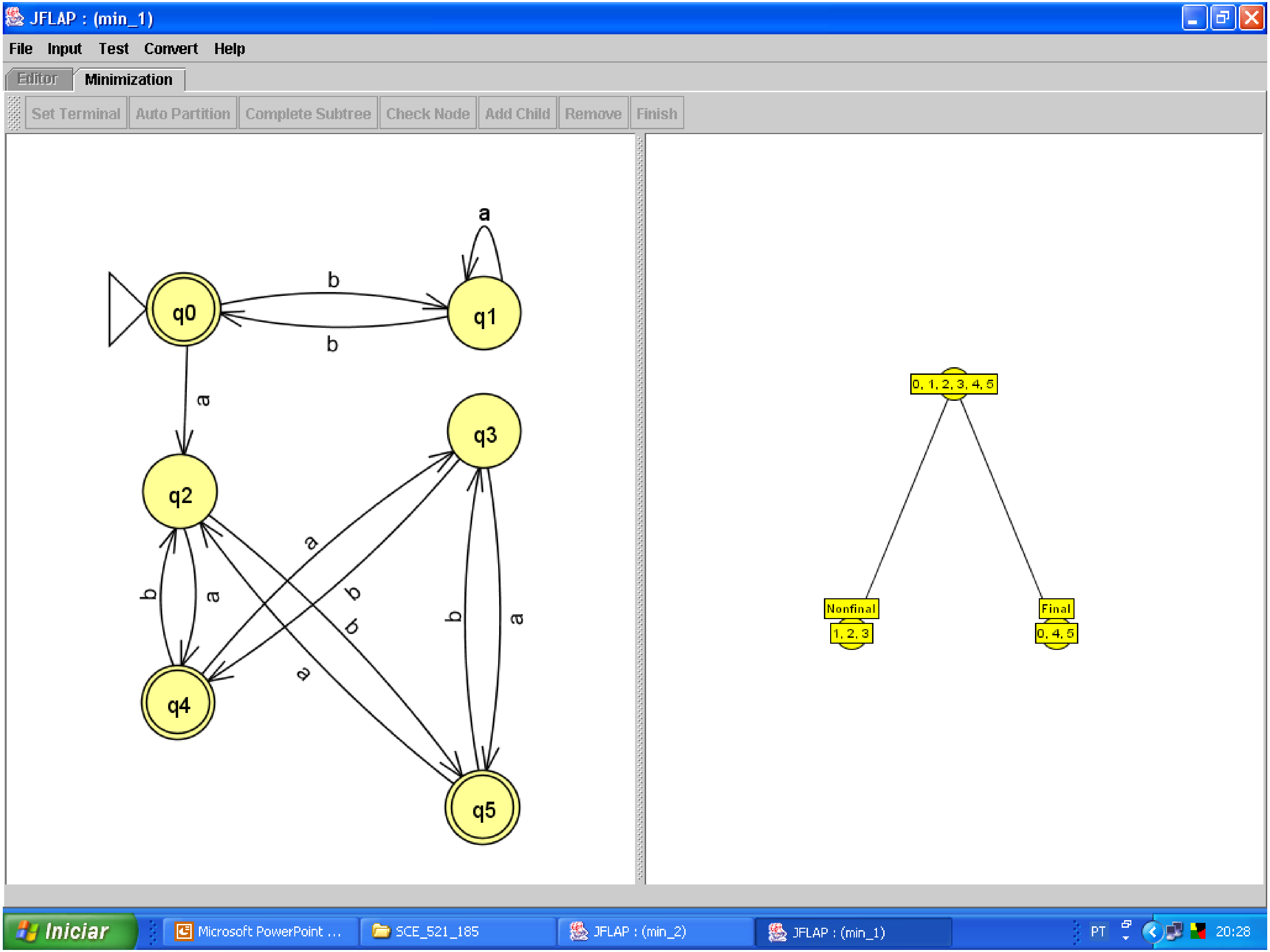
- excluir

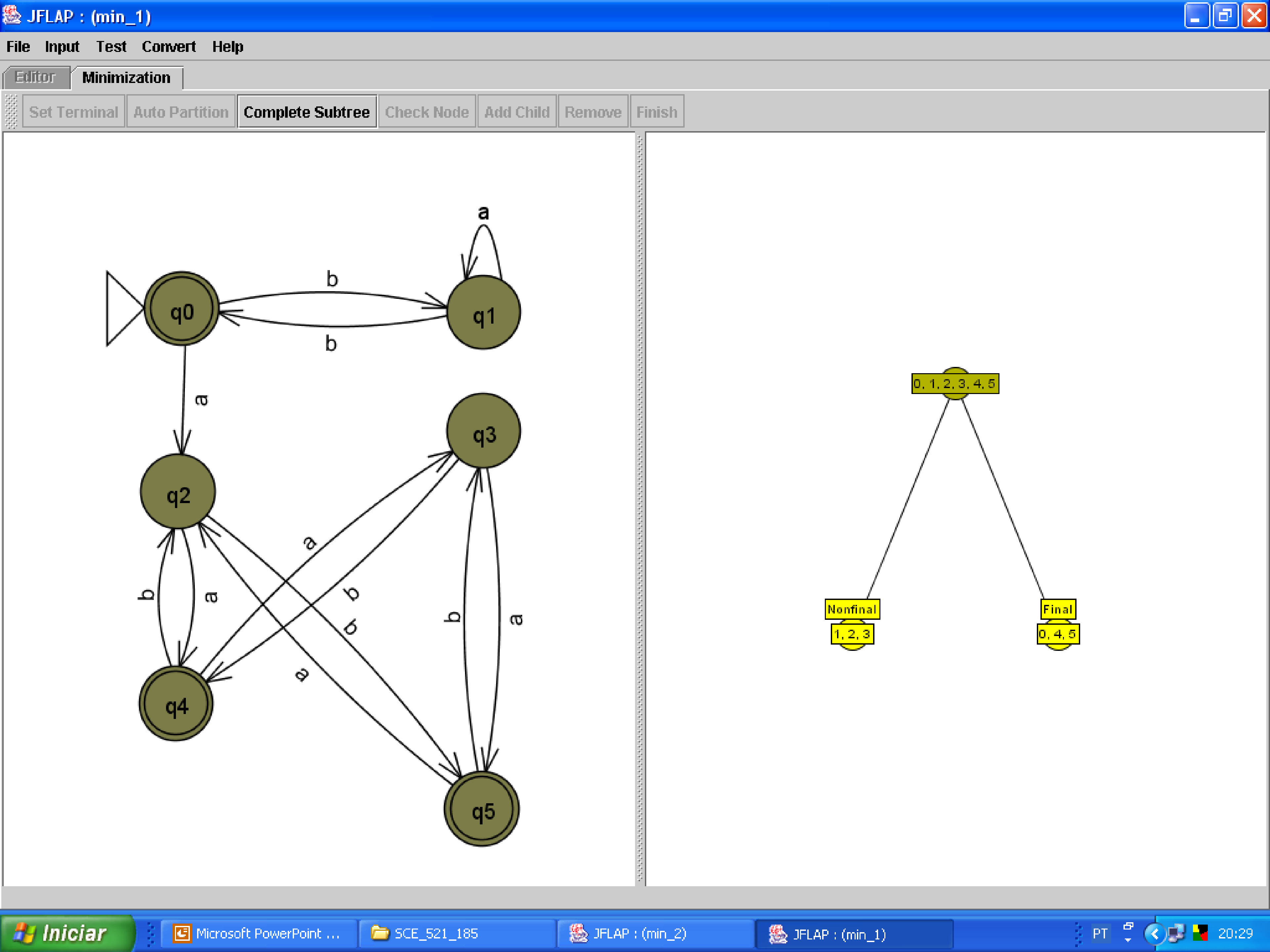
5) No exemplo, não há estados inúteis

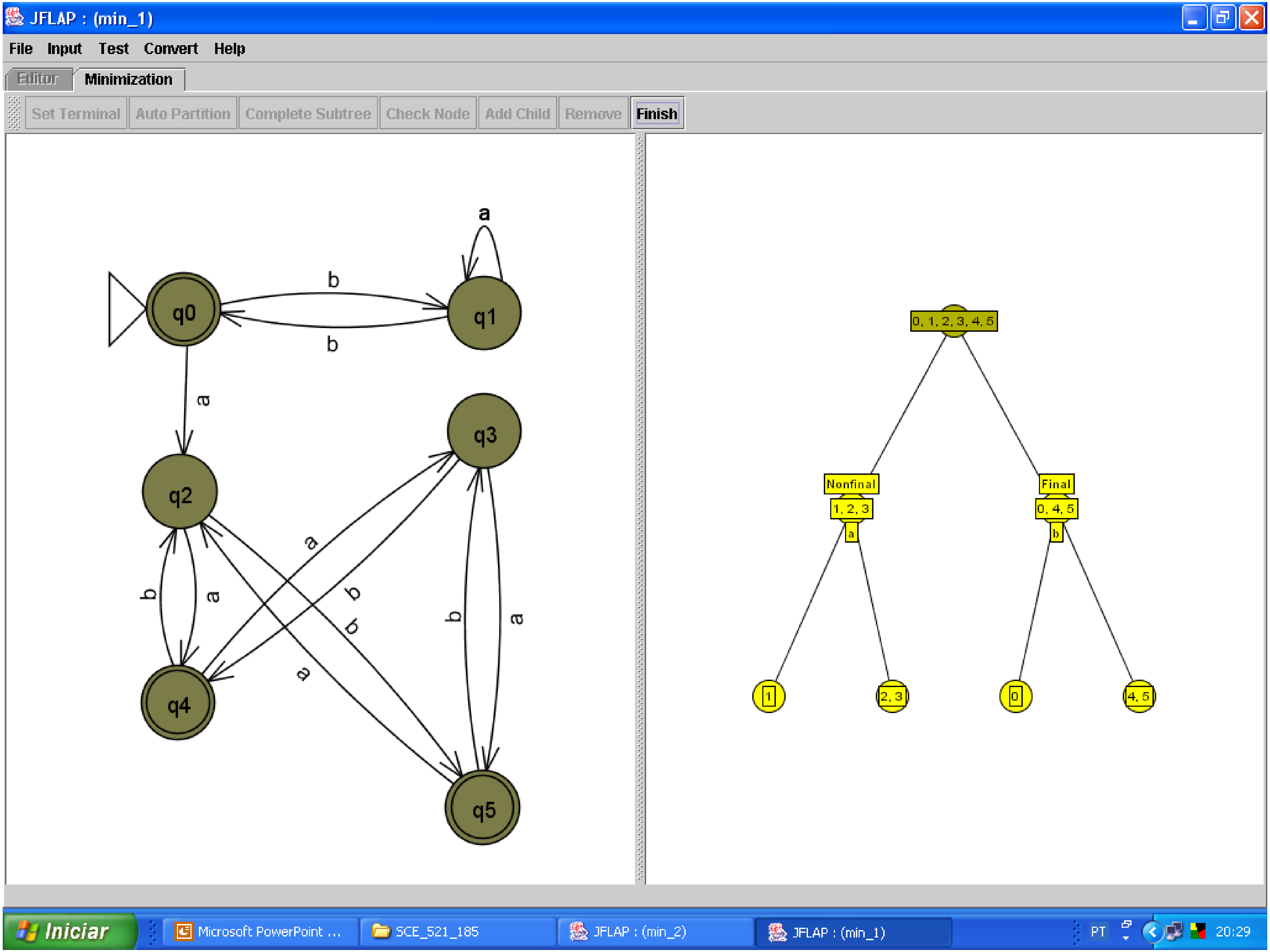
Autômato Inicial e Reduzido

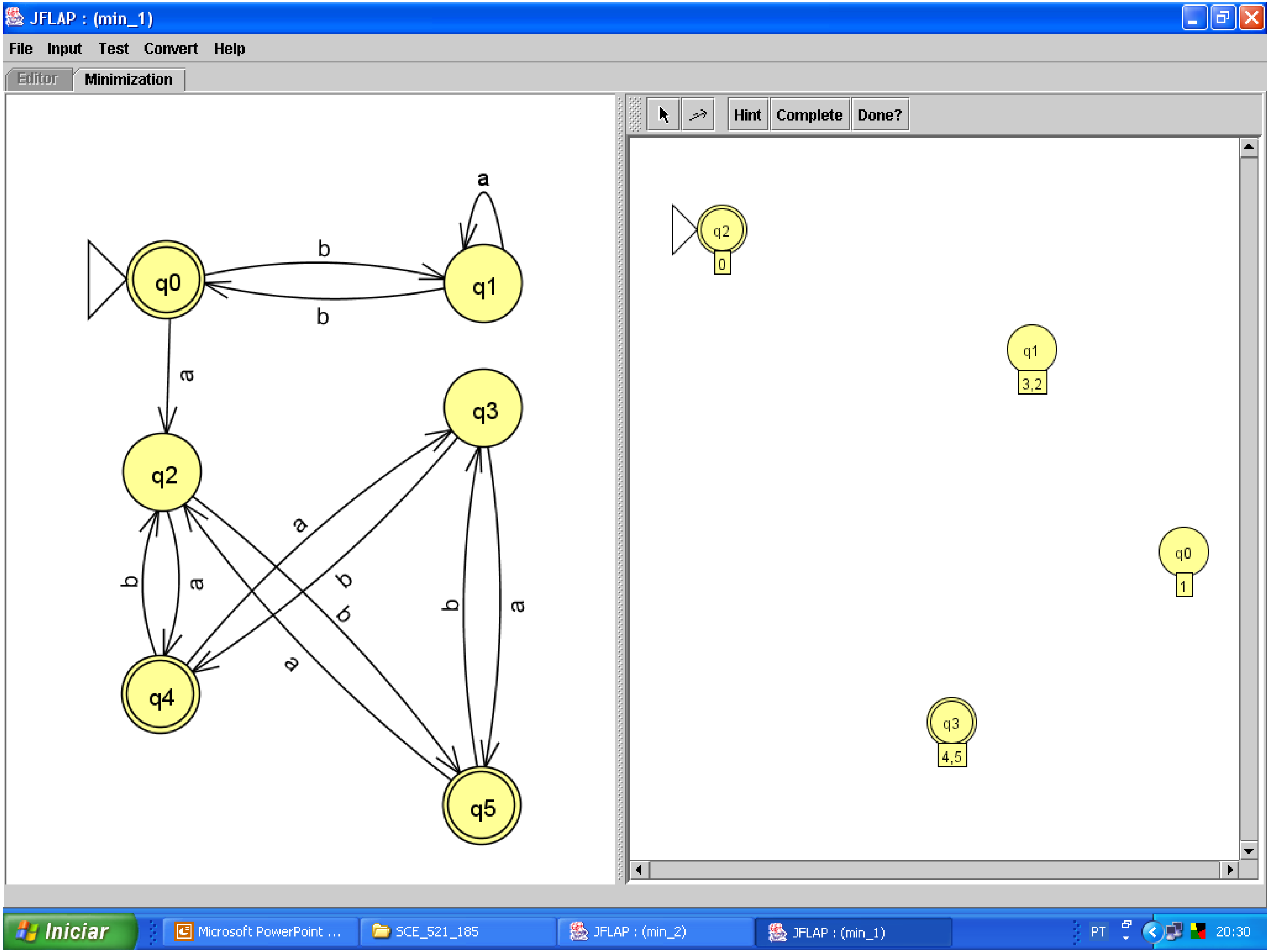


Usando o JFLAP para minimizar

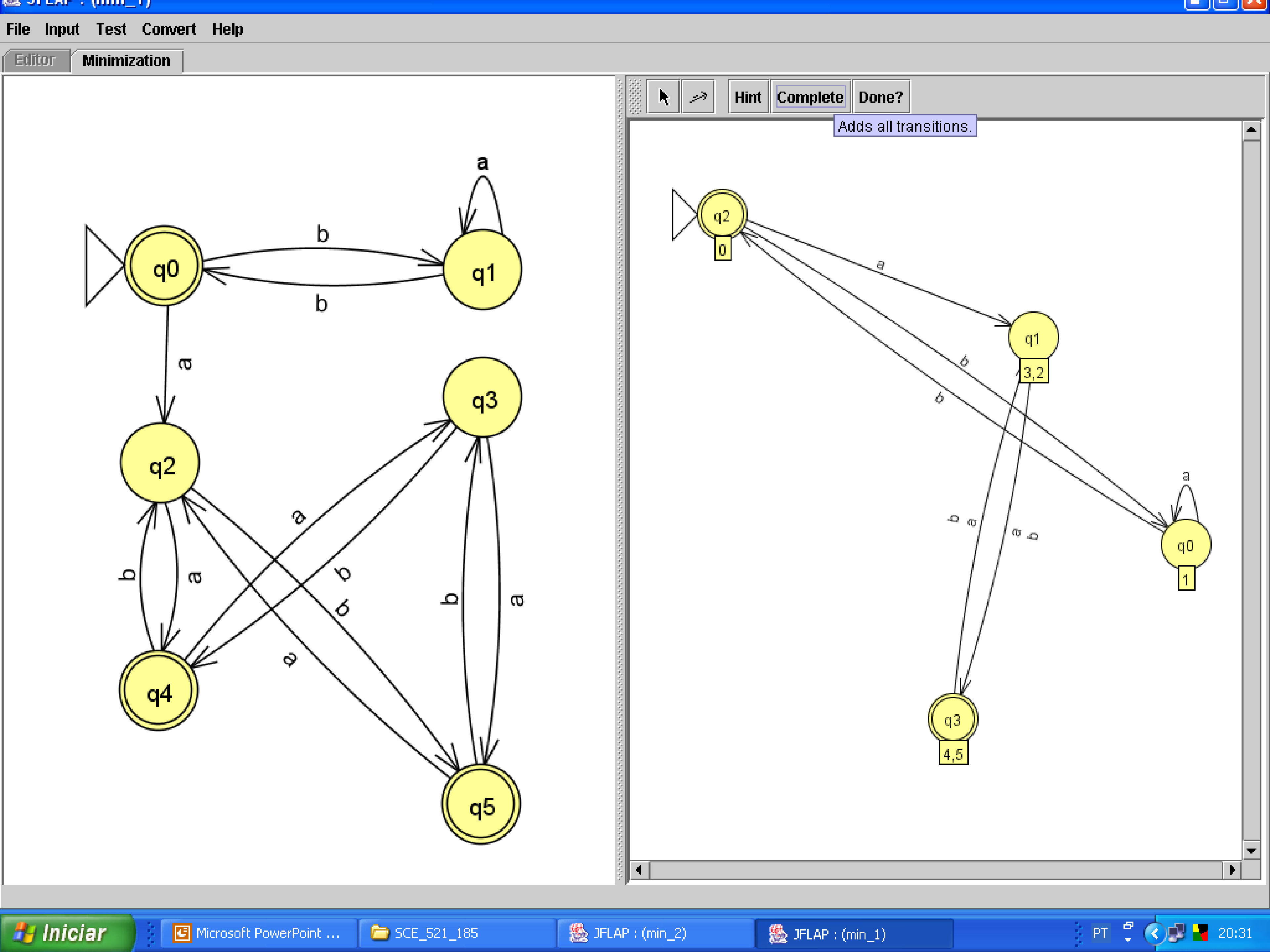

JFLAP : (min_1)
File
Input
Test
Convert
Help
Editor
Minimization
Set Terminal
Auto Partition
Complete Subtree
Check Node
Add Child
Remove
Finish
q0
q1
q2
q3
q4
q5
a
b
0, 1, 2, 3, 4, 5
Nonfinal
1, 2, 3
Final
0, 4, 5
Iniciar
Microsoft PowerPoint ...
SCE_521_185
JFLAP : (min_2)
JFLAP : (min_1)
PT
20:28

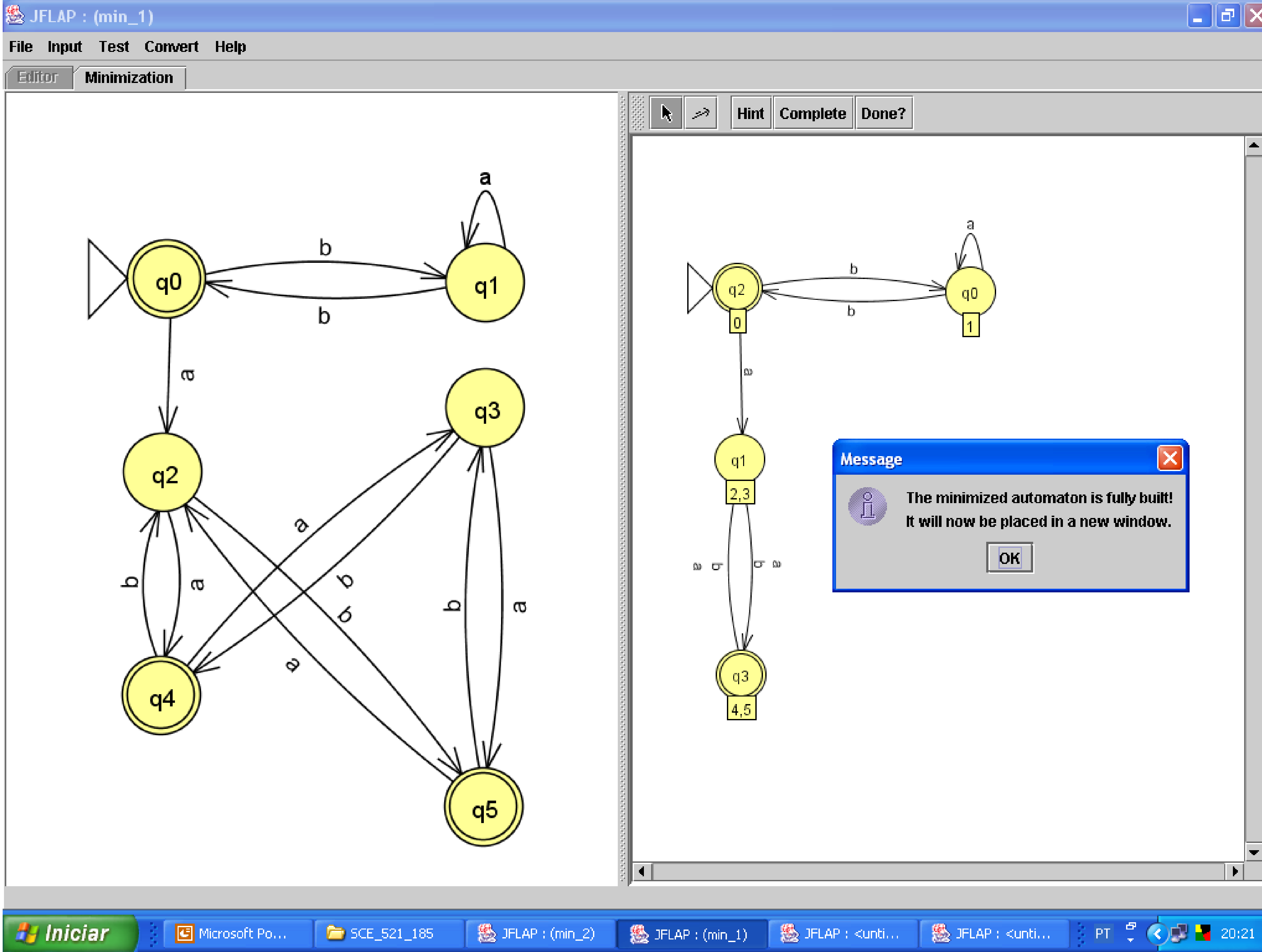

JFLAP : (min_1)
File Input Test Convert Help
Editor Minimization
Set Terminal Auto Partition Complete Subtree Check Node Add Child Remove Finish
q0
q1
q2
q3
q4
q5
a
b
0, 1, 2, 3, 4, 5
Nonfinal
1, 2, 3
Final
0, 4, 5
Iniciar
Microsoft PowerPoint ...
SCE_521_185
JFLAP : (min_2)
JFLAP : (min_1)
PT
20:29


JFLAP : (min_1)
File
Input
Test
Convert
Help
Editor
Minimization
Set Terminal
Auto Partition
Complete Subtree
Check Node
Add Child
Remove
Finish
q0
q1
q2
q3
q4
q5
a
b
0, 1, 2, 3, 4, 5
Nonfinal
1, 2, 3
Final
0, 4, 5
1
2, 3
0
4, 5
Iniciar
Microsoft PowerPoint ...
SCE_521_185
JFLAP : (min_2)
JFLAP : (min_1)
PT
20:29



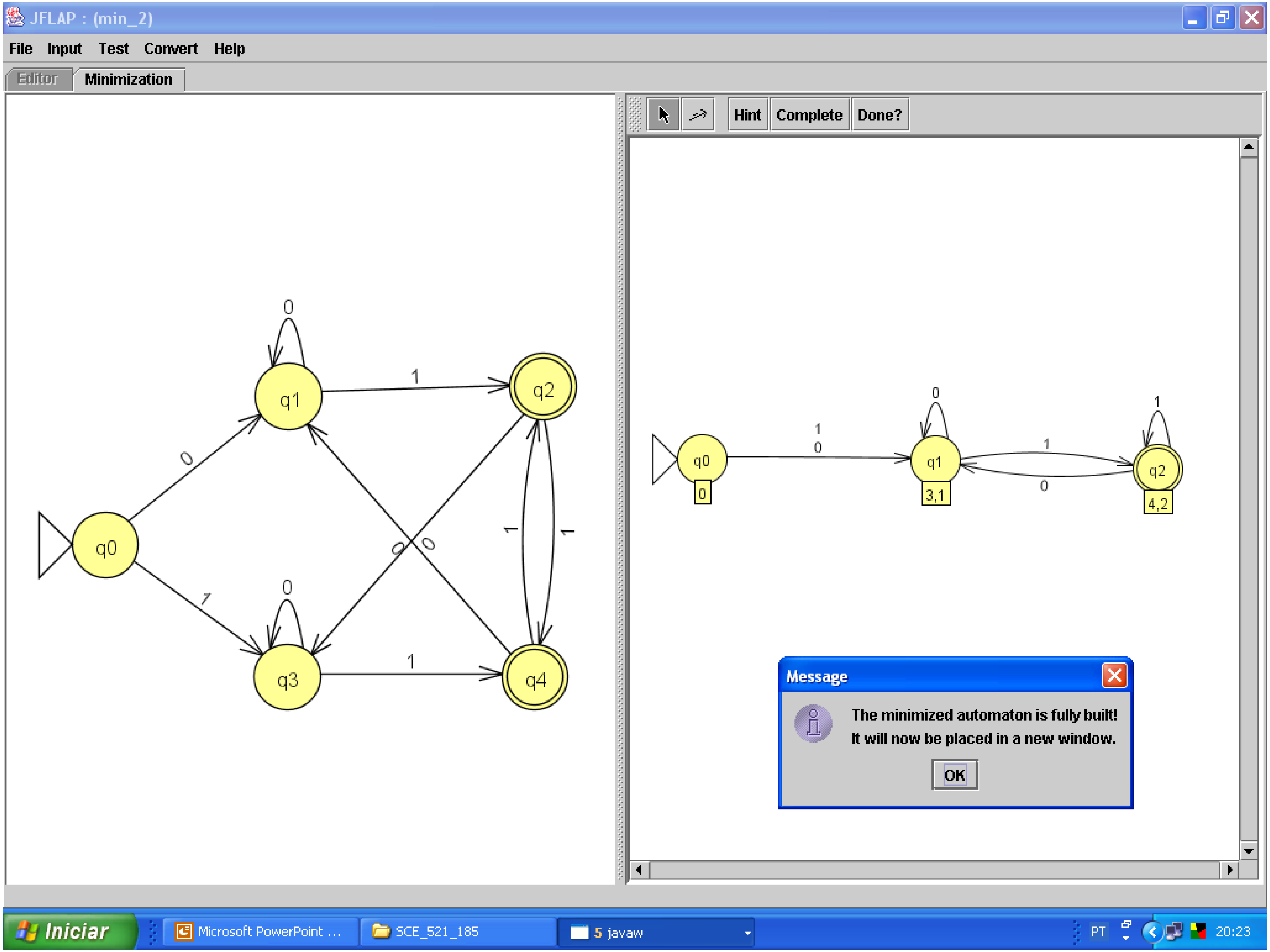
JFLAP : (min_1)
File Input Test Convert Help
Editor
Minimization
Hint
Complete
Done?
q0
q1
q2
q3
q4
q5
a
b
q2
0
q1
3,2
q0
1
q3
4,5
Iniciar
Microsoft PowerPoint ...
SCE_521_185
JFLAP : (min_2)
JFLAP : (min_1)
PT
20:30


File Input Test Convert Help
Editor
Minimization
Hint
Complete
Done?
Adds all transitions.
q0
q1
q2
q3
q4
q5
a
b
0
3,2
1
4,5
Iniciar
Microsoft PowerPoint ...
SCE_521_185
JFLAP : (min_2)
JFLAP : (min_1)
PT
20:31


JFLAP : (min_1)
File Input Test Convert Help
Editor
Minimization
Hint
Complete
Done?
q0
q1
q2
q3
q4
q5
a
b
0
1
2,3
4,5
Message
The minimized automaton is fully built!
It will now be placed in a new window.
OK
Iniciar
Microsoft Po...
SCE_521_185
JFLAP : (min_2)
JFLAP : (min_1)
JFLAP : <unti...
JFLAP : <unti...
PT
20:21

Exercício para casa

- Apliquem o algoritmo para o AF a seguir e compare com o resultado do JFLAP mostrado ao lado.



JFLAP : (min_2)
File
Input
Test
Convert
Help
Editor
Minimization
Hint
Complete
Done?
q0
q1
q2
q3
q4
0
1
Message
The minimized automaton is fully built!
It will now be placed in a new window.
OK
3,1
4,2
Iniciar
Microsoft PowerPoint ...
SCE_521_185
5 javaw
PT
20:23