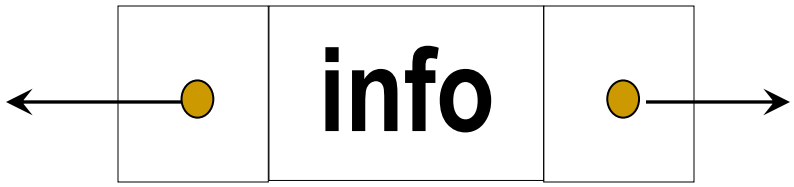
Árvores Binárias

16/11
Representação e Implementação: Encadeada Dinâmica
O TAD

ED AB, encadeada dinâmica

Para qualquer árvore, cada nó é do tipo



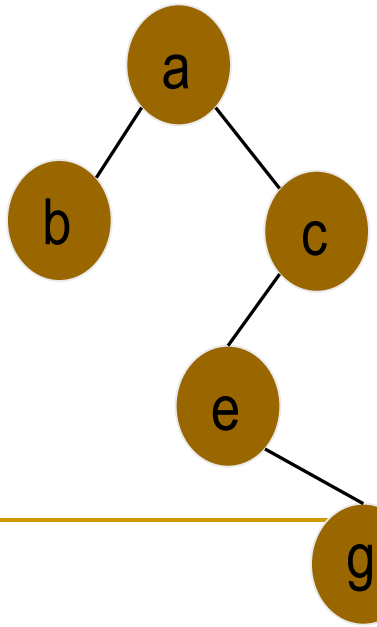
AB.h

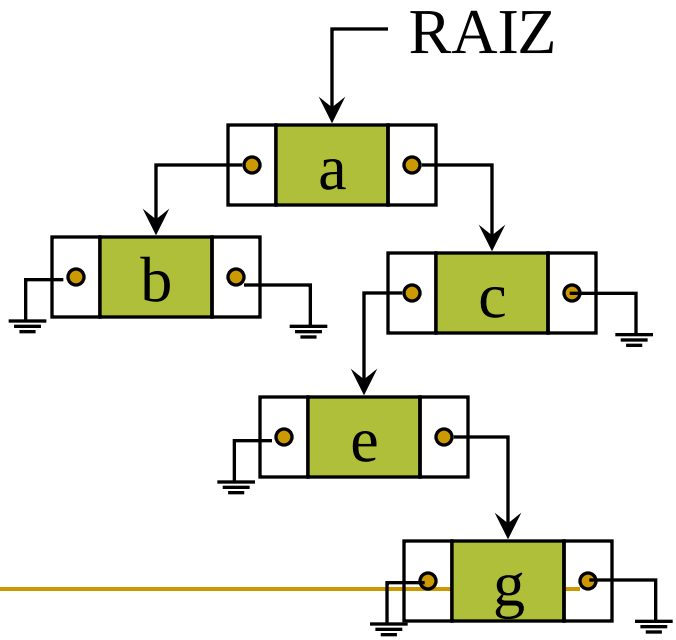
```
typedef  int elem;

typedef struct arv *Arv;
```

AB.c

```
struct arv {
    elem info;
    struct arv* esq;
    struct arv* dir;
};
```





Árvore binária

- Operações do TAD
  1. Criação de uma árvore

  Dois casos: seguindo a definição recursiva
     1. Criar uma árvore vazia
     2. Criar uma árvore com 2 subárvores (e,d): **faz o papel de inserir nó**
  2. Verificar se árvore está vazia, mostrar o conteúdo do nó
  3. Buscar o pai de um nó, buscar um nó
  4. Retornar: nro de nós, nro de folhas, altura
  5. Destruir árvore
  6. Remover um nó

  Dois casos:
     1. O nó não tem filhos
     2. O nó tem um filho a esq, ou a dir ou os dois
  7. Verificar nível de um nó
  8. Verificar se é balanceada, se é perfeitamente balanceada
  - Outras?

Operações com resolução similar: usam percursos

- Operações do TAD
  1. Criação de uma árvore

  Dois casos: seguindo a definição recursiva
     1. Criar uma árvore vazia
     2. Criar uma árvore com 2 subárvores (e,d): **faz o papel de inserir nó**
  2. Verificar se árvore está vazia, mostrar o conteúdo do nó
  3. Buscar o pai de um nó, buscar um nó
  4. Retornar: nro de nós, nro de folhas, altura
  5. Destruir árvore
  6. Remover um nó

  Dois casos:
     1. O nó não tem filhos
     2. O nó tem um filho a esq, ou a dir ou os dois
  7. Verificar nível de um nó
  8. Verificar se é balanceada, se é perfeitamente balanceada
  - Imprime

Interface para as funções do TAD

- typedef int elem;
  // Tipo exportado
- typedef struct arv *Arv;

- // Cria uma árvore vazia
  Arv arv_criavazia (void);

- // Cria uma árvore com uma raiz e duas subárvores
  Arv arv_cria (elem c, Arv e, Arv d);

- //Libera toda a memória usada na árvore a
  Arv arv_destroi (Arv a);

- // Imprime a lista a
  void arv_imprime (Arv a);

- // Verifica se a árvore a é vazia

  int arv_vazia (Arv a);

- // Retorna o conteúdo de um nó x na árvore a

  elem arv_mostra_no(Arv a, int *erro);

- //Retorna (busca) o endereço de c na árvore a. Se c não está, retorna NULL

  Arv arv_busca (Arv a, elem c);

- // Retorna (busca) o endereço do pai de x na árvore a

  Arv arv_busca_pai(Arv a, elem x);

- //Remove um elemento da árvore, caso ele esteja nela. Retorna erro = 0 se sucesso e erro = 1 se não encontra

  void arv_remove(Arv a, elem x, int *erro);

- //Retorna a altura de uma árvore binária a. Considera o nível da raiz = 1
  int arv_altura(Arv a);

- // Retorna o número de nós na árvore a
  int arv_numero_nos(Arv a);

- //Retorna o número de folhas da árvore a
  int arv_nro_folhas(Arv a);

- //função de percurso de pre-ordem na árvore = busca em profundidade
  void arv_percurso_pre_ordem(Arv a);

- //função de percurso de em-ordem na árvore
  void arv_percurso_em_ordem(Arv a);

- //função de percurso de pos-ordem na árvore
  void arv_percurso_pos_ordem(Arv a);

AB - Percursos

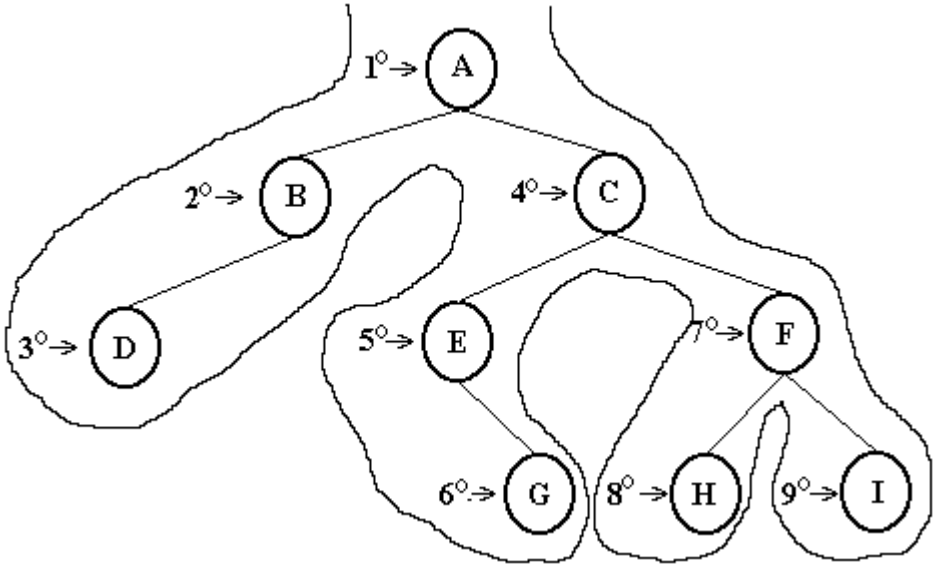
- Objetivo: Percorrer uma AB 'visitando' cada nó uma única vez.
- Um percurso gera uma seqüência linear de nós, e podemos então falar de nó predecessor ou sucessor de um nó, segundo um dado percurso.
  - Não existe um percurso único para árvores (binárias ou não): diferentes percursos podem ser realizados, dependendo da aplicação.
- Utilização: imprimir uma árvore, atualizar um campo de cada nó, buscar um item, destruir uma árvore, etc.

AB – Percursos em Árvores

- 3 percursos básicos para AB's:
  - pré-ordem (Pre-order)
  - in-ordem (In-order)
  - pós-ordem (Post-order)
- A diferença entre eles está, basicamente, na ordem em que cada nó é alcançado pelo percurso
  - "Visitar" um nó pode ser:
    - Mostrar (imprimir) o seu valor;
    - Modificar o valor do nó;
    - Verificar se o valor pertence a árvore (membro)

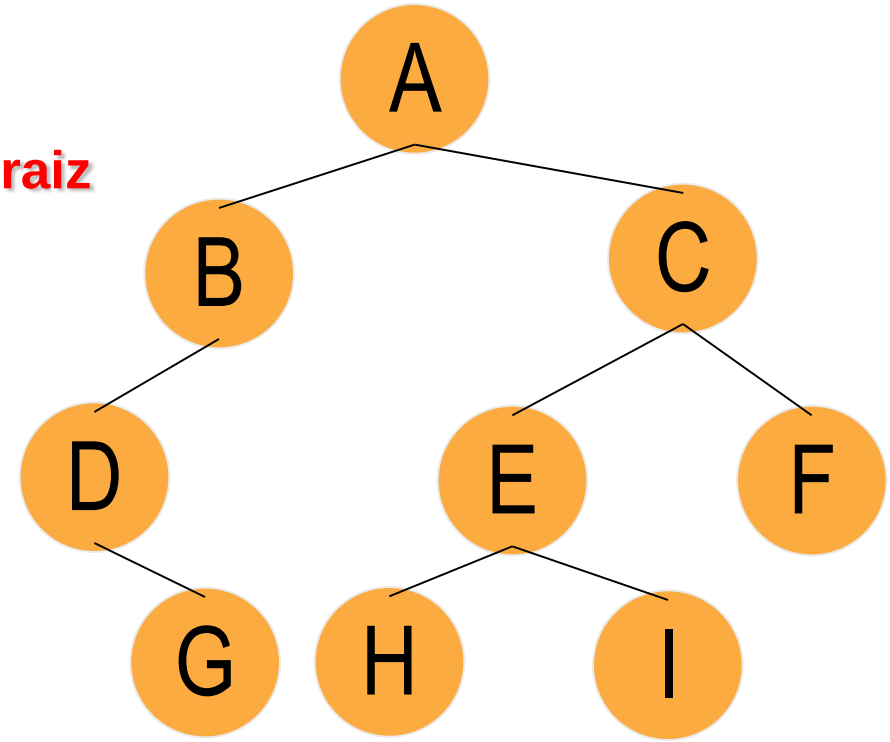
Pré-ordem

se árvore vazia; fim
1. visitar o nó raiz
2. percorrer em pré-ordem a subárvore esquerda
3. percorrer em pré-ordem a subárvore direita



AB - Percurso Pré-Ordem

```
void arv_percurso_pre_ordem(Arv a) {
    if (!arv_vazia(a)) {
       printf("%d\n",a->info); // processa raiz
       arv_percurso_pre_ordem(a->esq);
       arv_percurso_pre_ordem(a->dir);
    }
}
```



Resultado: ABDGCEHIF

E se invertermos as chamadas recursivas?

Trocar

```
pre_ordem(a->esq);
pre_ordem(a->dir);
```

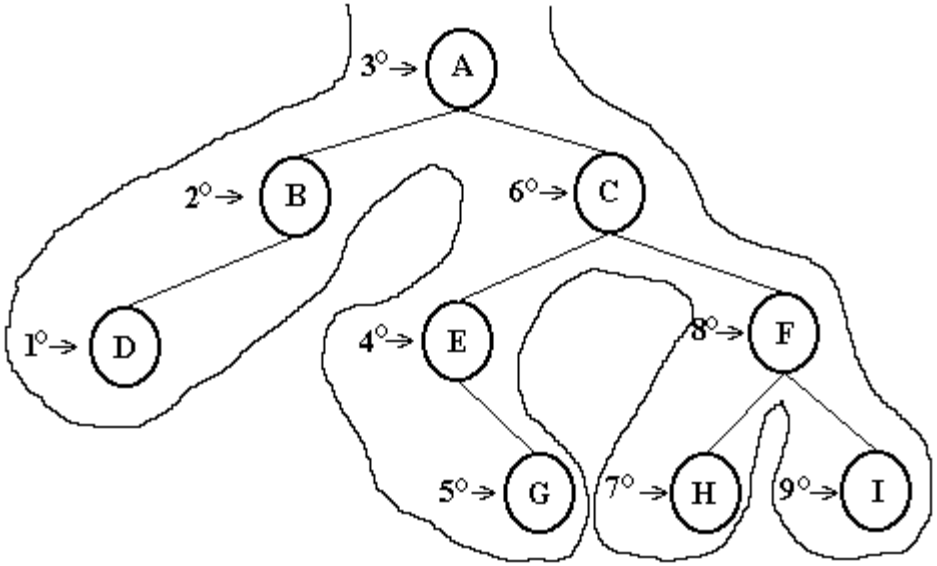
POR:

```
pre_ordem(a->dir);
pre_ordem(a->esq);
```

Ainda é pré-ordem??

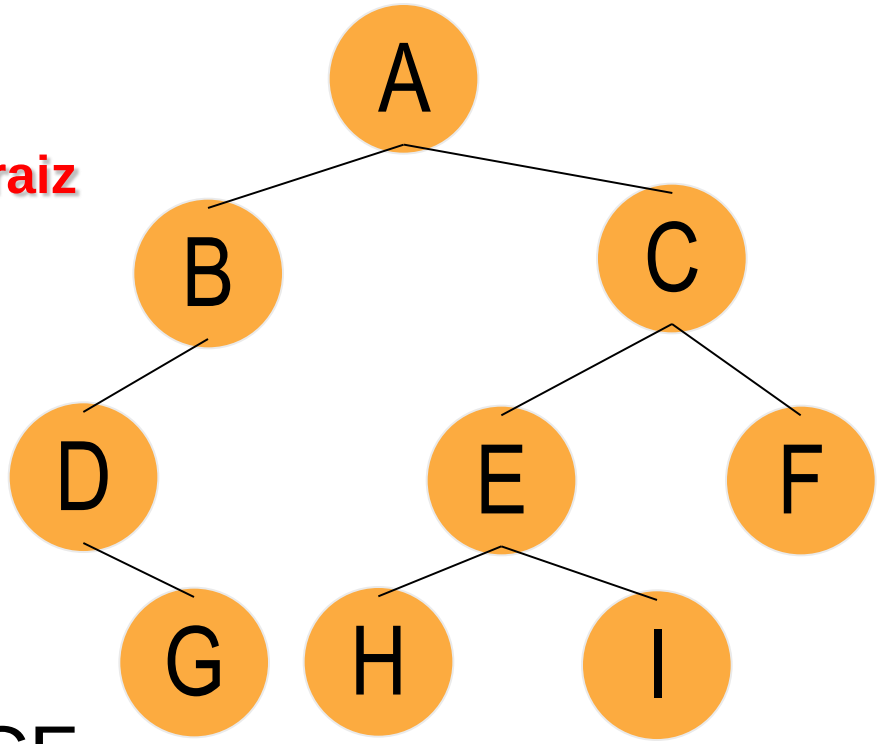
In-Ordem

se árvore vazia, fim
1. percorrer em in-ordem a subárvore esquerda
2. visitar o nó raiz
3. percorrer em in-ordem a subárvore direita



AB - Percurso In-Ordem

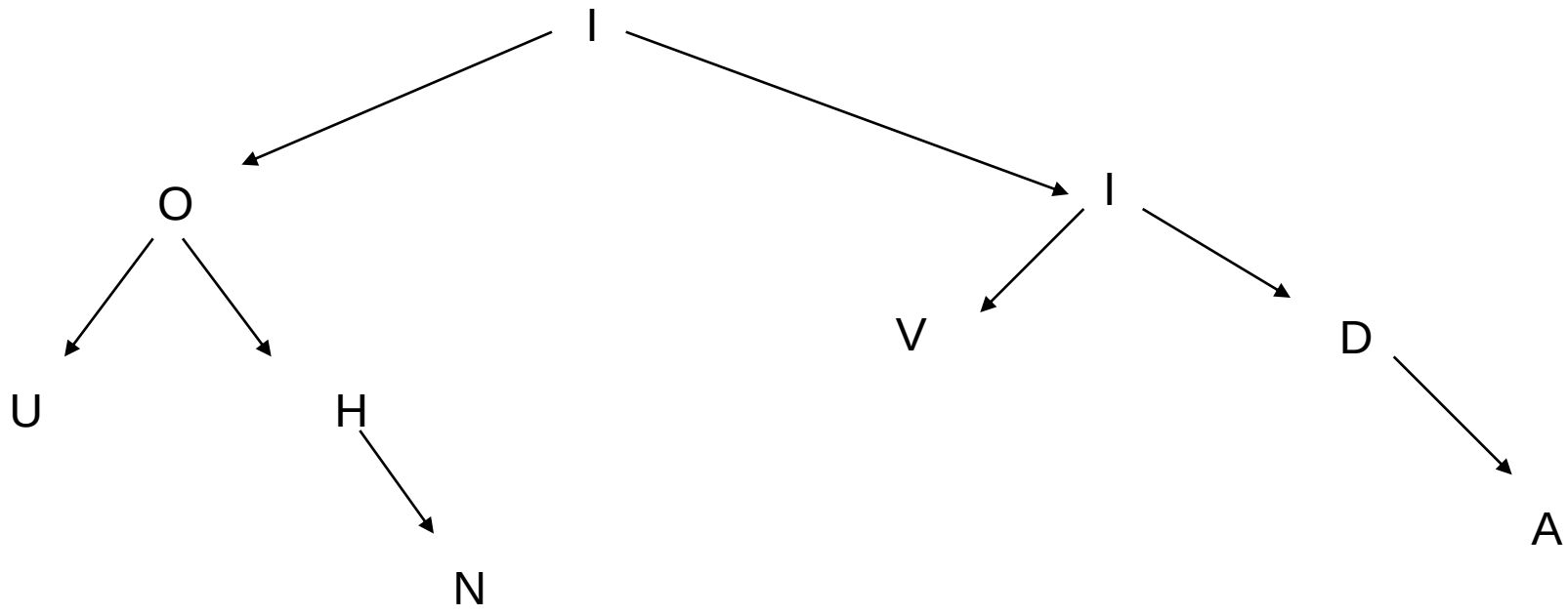
```
void arv_percurso_em_ordem(Arv a) {
    if (!arv_vazia(a)) {
       arv_percurso_em_ordem(a->esq);
       printf("%d\n",a->info); // processa raiz
       arv_percurso_em_ordem(a->dir);
    }
}
```



Resultado: DGBAHEICF

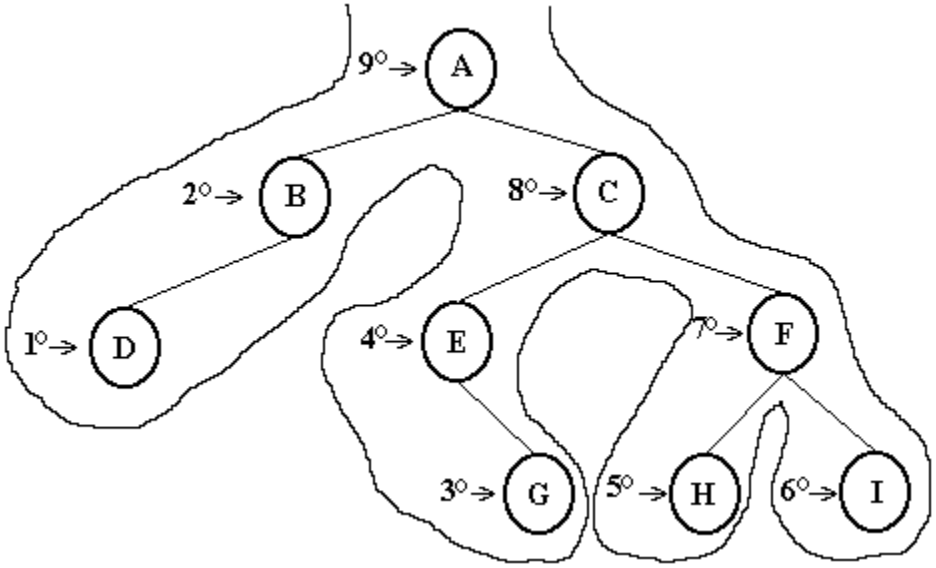
E se invertermos as chamadas recursivas?

- Ainda é in-ordem? Qual o resultado para a árvore abaixo?



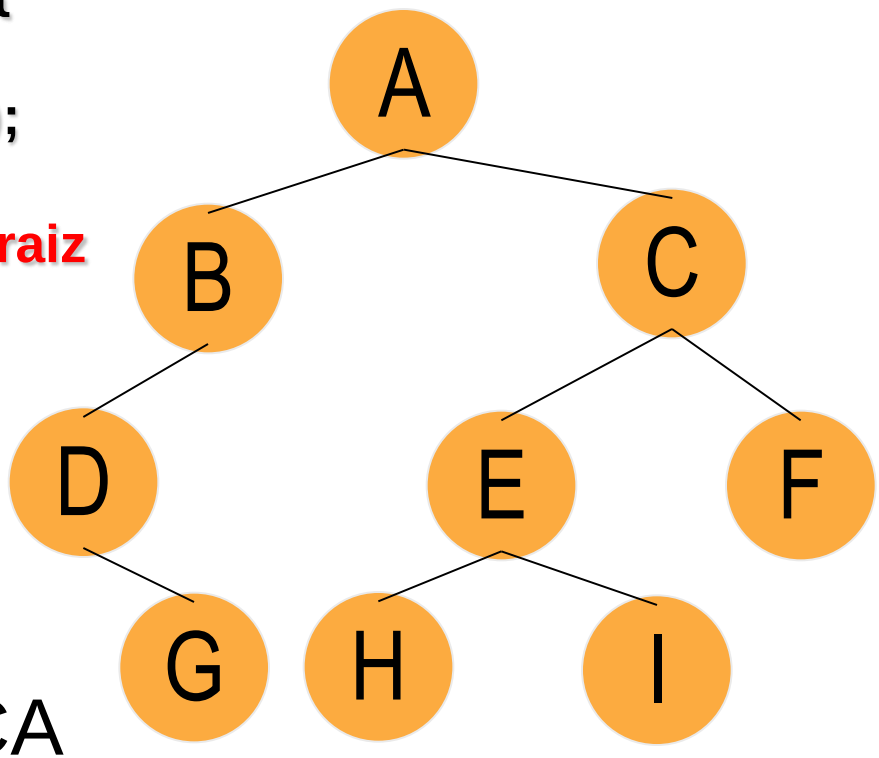
Pós-ordem

se árvore vazia, fim
1. percorrer em Pós-Ordem a subárvore esquerda
2. percorrer em Pós-Ordem a subárvore direita
3. visitar o nó raiz



AB - Percurso Pós-Ordem

```
void arv_percurso_pos_ordem(Arv a) {
    if (!arv_vazia(a)) {
       arv_percurso_pos_ordem(a->esq);
       arv_percurso_pos_ordem(a->dir);
       printf("%d\n",a->info); //processa raiz
    }
}
```



Resultado: GDBHIEFCA

E se invertermos as chamadas recursivas?

- Ainda é pós-ordem?

- Procedimento recursivo p/ destruir árvore, liberando o espaço alocado
  - Usar percurso em pós-ordem

- Arv arv_destroi (Arv a)

Procedimento recursivo p/ destruir árvore, liberando o espaço alocado (percurso em pós-ordem)

Porque não usamos pré ou in-ordem para esta tarefa???

```
Arv arv_destroi (Arv a) {
if (!arv_vazia(a)) {
arv_destroi(a->esq);  /* libera sae */
arv_destroi(a->dir);   /* libera sad */
free(a);                    /* libera raiz */
}
return NULL;
}
```

Função para verificar se valor está na árvore

//Retorna (busca) o endereço de c na árvore a. Se c não está retorna NULL

Arv arv_busca (Arv a, elem c)

Função para verificar se valor está na árvore

```
Arv arv_busca (Arv a, elem c) {
Arv aux;

if (arv_vazia(a))
    return NULL; /* árvore vazia: não encontrou */
else if (a->info==c)
        return a;
     else {
        aux = arv_busca(a->esq,c); /* busca na sae */
        if (aux == NULL)
          aux = arv_busca(a->dir,c); /* busca na sad */
        return aux;
      }
}
```

Função para retornar o endereço do pai de um nó com elemento x

- // Retorna (busca) o endereço do pai de x na árvore a. Retorna NULL se for nula, tiver só raiz ou não achou o elemento x
- Casos:

1. Se a árvore é nula ou só tem raiz devolve NULL
2. Se tem filho à esquerda e é x devolve raiz
3. Se tem filho à direita e é x devolve raiz
4. Senão chama recursivamente à esquerda e se não achou chama recursivamente à direita

- Arv arv_busca_pai(Arv a, elem x);

```
Arv arv_busca_pai(Arv a, elem x) {
Arv aux;

if (arv_vazia(a))  // árvore vazia
    return(NULL);
else if (a->esq == NULL && a->dir == NULL) // só tem raiz
        return(NULL);
     else if ((a->esq!=NULL) && (a->esq->info==x))
             return(a);
          else if ((a->dir!=NULL) && (a->dir->info==x))
                  return(a);
               else {
                    aux=arv_busca_pai(a->esq,x);
                    if (aux==NULL)
                        aux=arv_busca_pai(a->dir,x);
                    return(aux);
               }
}
```

TAD

```
Arv arv_criavazia (void)
{
return NULL;
}

Arv arv_cria (elem c, Arv sae, Arv sad)
{
Arv p=(Arv)malloc(sizeof(struct arv));
p->info = c;
p->esq = sae;
p->dir = sad;
return p;
}
```

```
int arv_vazia (Arv a)
{
return a==NULL;
}
```

Exercício

- Mostra o conteúdo do nó
- Retornar o nro de nós
- Retornar o nro de folhas

Mostra o conteúdo do nó

```
elem arv_mostra_no(Arv a, int *erro){
*erro = 0;
if (!arv_vazia(a))
return a->info;
else *erro = 1;
}
```

Função para retornar o número de nós

```
int arv_numero_nos(Arv a){
if (arv_vazia(a))
return 0;
return  1 + arv_numero_nos(a->esq) +
   arv_numero_nos(a->dir);
}
```

Função para retornar o nro de folhas

```
int arv_nro_folhas(Arv a){
if (arv_vazia(a))
return 0;
else
   if ((a->esq == NULL) && (a->dir == NULL))
        return 1; // definição de nó folha
   else
        return arv_nro_folhas(a->esq) +
   arv_nro_folhas(a->dir);
}
```

Altura (considerando que o nível da raiz é 0)

- *pré-condição:* Árvore binária já tenha sido criada
- *pós-condição:* retorna a altura da árvore

A definição de altura de uma árvore nos leva aos seguintes casos:

- Caso base: a altura de uma árvore vazia é -1 (por definição a altura das folhas é 0; portanto parece natural adotar -1 como a altura de uma árvore vazia)

- Caso recursivo: a altura de uma árvore que contém um nó (não nulo) é determinada como sendo a maior altura entre as subárvores esquerda e direita deste nó adicionado a um (uma unidade a mais de altura devido ao próprio nó)

Altura – considerando o nível da raiz = 0

```
int arv_altura(Arv a) {
int alt_esq, alt_dir;
/*altura = max(altE, altD) + 1*/

if (arv_vazia(a))
      return -1;
else {
        alt_esq = 1+ arv_altura(a->esq);
        alt_dir = 1+ arv_altura(a->dir);
        if (alt_esq > alt_dir)
           return(alt_esq);
        else return(alt_dir);
    }
}
```

Altura – considerando o nível da raiz = 1

//segue as nossas definições

```
int arv_altura(Arv a) {
int alt_esq, alt_dir;
/*altura = max(altE, altD) + 1*/

if (arv_vazia(a))
      return 0;
else {
        alt_esq = 1+ arv_altura(a->esq);
        alt_dir = 1+ arv_altura(a->dir);
        if (alt_esq > alt_dir)
           return(alt_esq);
        else return(alt_dir);
    }
}
```

Exercício: Remover um nó

//Remove um elemento da árvore, caso ele esteja nela. Retorna erro = 0 se sucesso e erro = 1 se não encontra

void arv_remove(Arv a, elem x, int *erro);

Dois casos:

1. O nó não tem filhos
2. O nó tem um filho a esq, ou a dir ou os dois

Passos

1) Localize o pai do nó p (que contém x)
   - **// caso 1: só tem raiz e o x está nela**
   - **// caso 2: não tem pai: árvore nula ou x não está na árvore**
   - **// caso 3: o x está a esquerda do pai**
   - **// caso 4: o x está a direita do pai**

2) O nó não tem filhos:
   - Remova o nó

3) O nó tem um filho a esq, ou a dir ou os dois:

   Troque o conteúdo de p com o do seu filho a esquerda/direita e chame novamente a função para trazer o x para as folhas

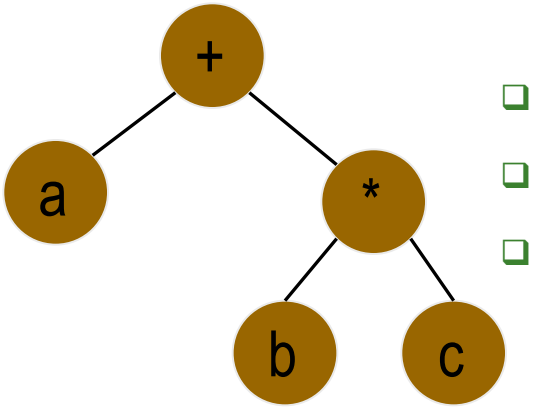
```
/* Passa o ponteiro para árvore a como referência */
void arv_remove(Arv *a, elem x, int *erro) {
    Arv  p, pai;
    int eh_filho_esq;

    //localizando o nó e o pai dele
    if ((!arv_vazia(*a)) && ((*a)->info==x)) {// caso 1: só tem raiz e o x está nela
       pai=NULL; p=*a;
    }
    else {
        pai=arv_busca_pai(*a,x); // busca pai e seta p
        if (pai!=NULL) {
           if ((pai->esq!=NULL) && (pai->esq->info==x)) {
              p=pai->esq; eh_filho_esq=1; // caso 3: o x está a esquerda do pai
           }
           else {
                p=pai->dir; eh_filho_esq=0; // caso 4: o x está a esquerda do pai
           }
        }
        else p=NULL; // caso 2: não tem pai: árvore nula ou x não está na árvore
    }
```

```
if (p==NULL)
      *erro=1;
   else {
      //primeiro caso: o nó não tem filhos
      if ((p->esq==NULL) && (p->dir==NULL)) {
         if (pai!=NULL) {
            if (eh_filho_esq)
               pai->esq=NULL;
            else pai->dir=NULL;
         }
         else *a=NULL;
         free(p);
         *erro=0;
      }
      //segundo caso: o nó tem um ou dois filhos
      else {
          if (p->esq!=NULL) {
             p->info=p->esq->info; p->esq->info=x;
          }
          else {
              p->info=p->dir->info; p->dir->info=x;
          }
          arv_remove(&(*a),x,erro);
      }
   }
}
```

AB – Percursos

- Percurso para expressões aritméticas



  - Pré-ordem: +a*bc
  - In-ordem: a+(b*c)
  - Pós-ordem: abc*+

- Em algoritmos iterativos utiliza-se uma pilha ou um campo a mais em cada nó para guardar o nó anterior (pai)

Conclusões

- O processo de busca de informação em uma árvore binária como vimos até agora é caro.
  - Se as chaves não estão em uma ordem pré-estabelecida, toda a estrutura precisa ser percorrida para encontrar uma determinada chave (no pior caso),o que não seria eficiente

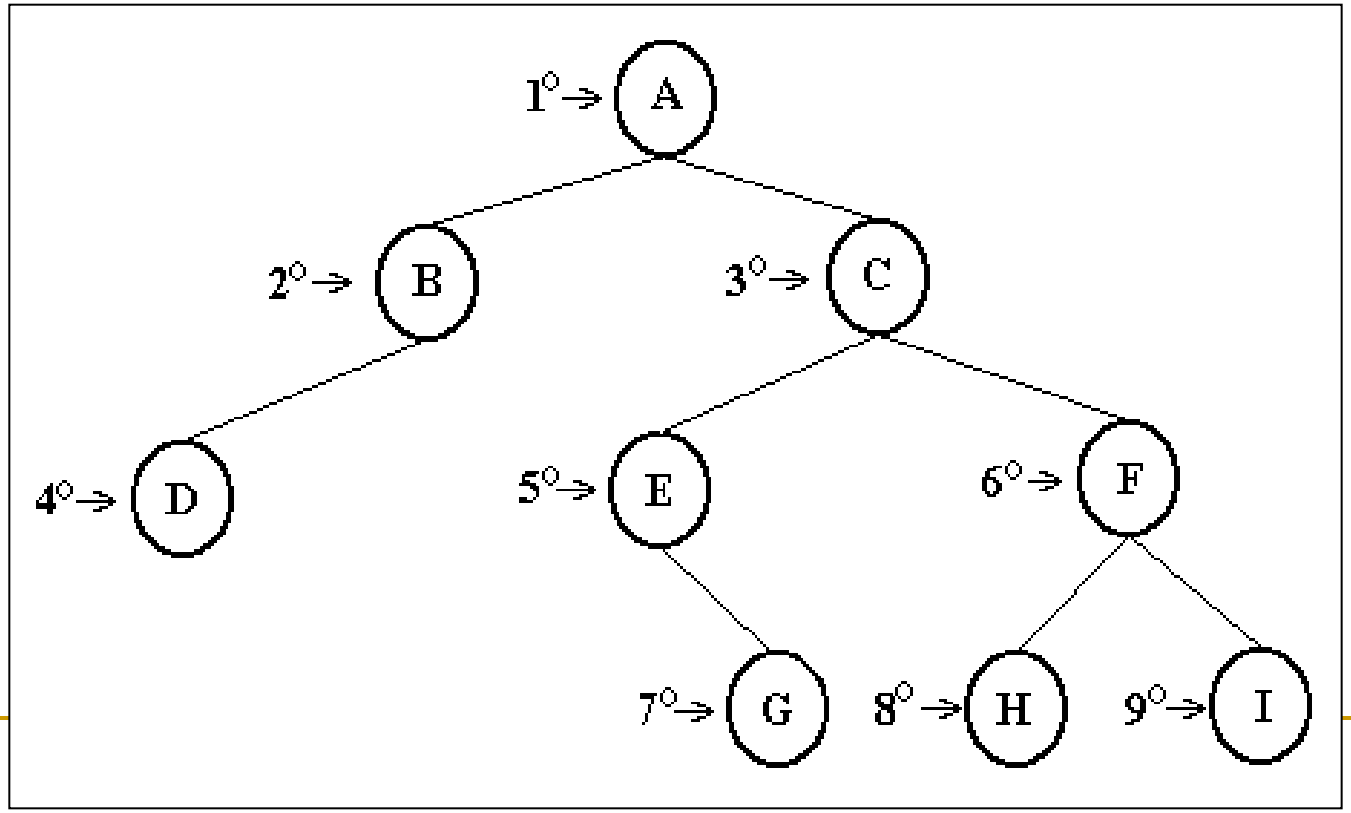
- Veremos uma forma de melhorar o tempo de busca, utilizando Árvores Binárias de Busca

Percurso em árvores

- Outras formas/nomenclaturas
  - Busca/percurso em largura
  - Busca/percurso em profundidade
- Independente do tipo de árvore
- Tradicionalmente da esquerda para a direita

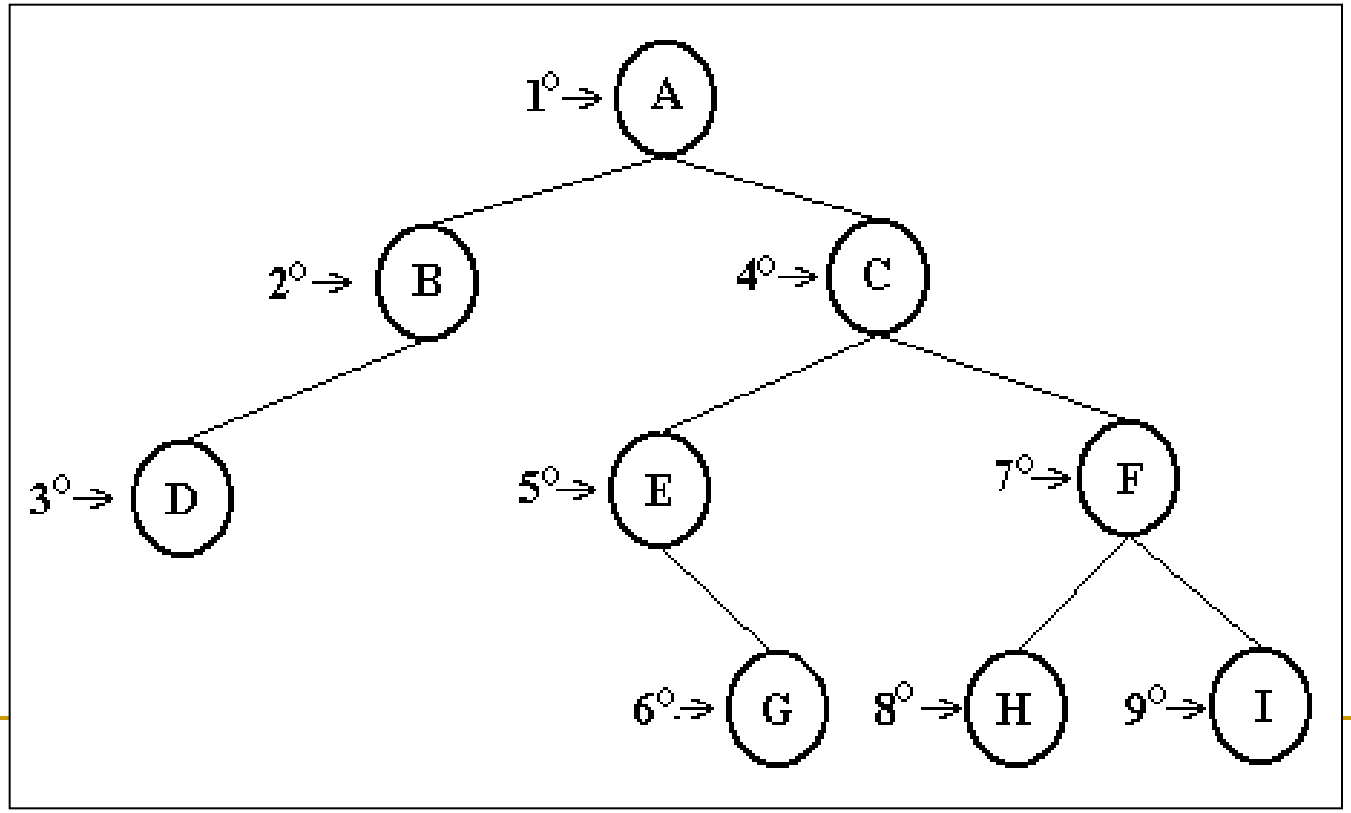
Percurso em árvores

- Em largura
  - Um nível de cada vez



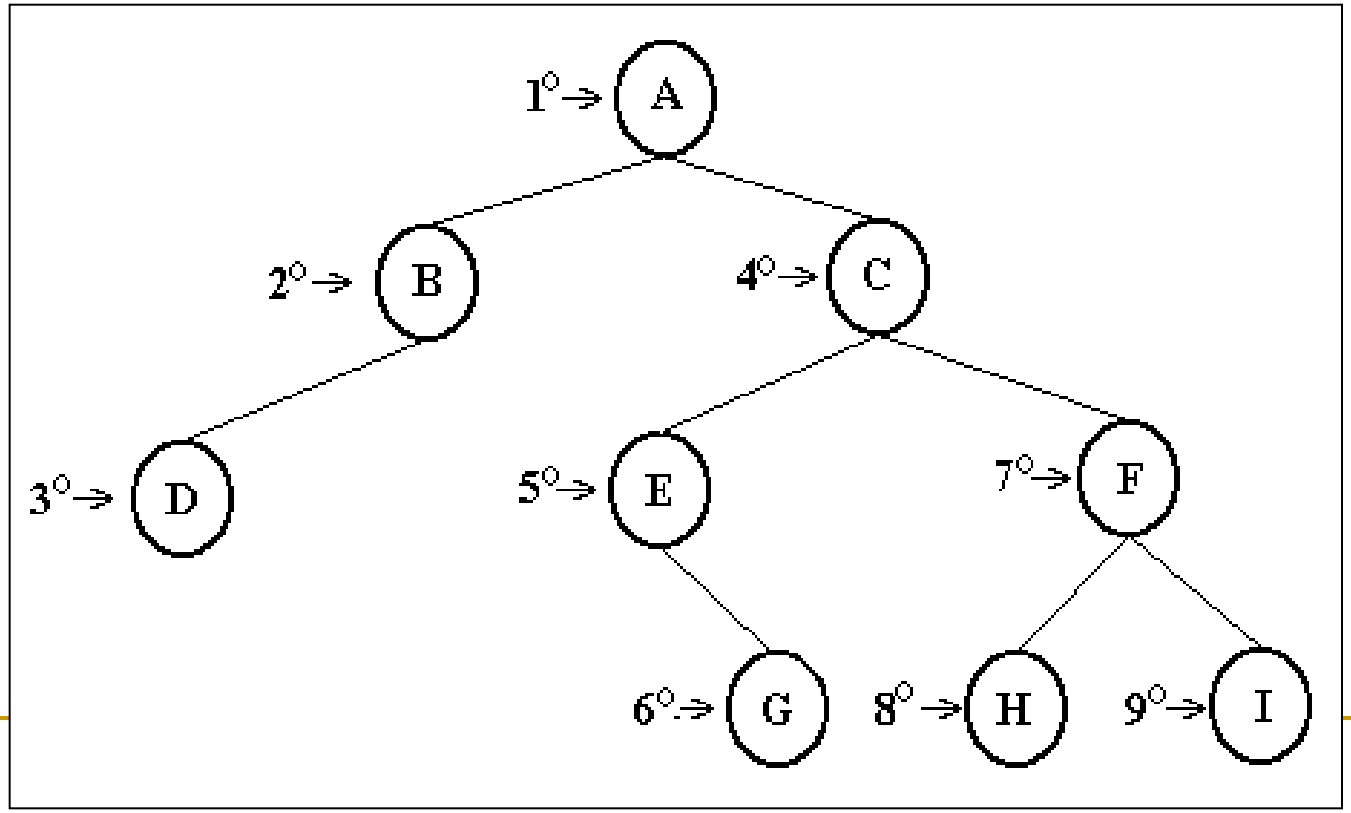
Percurso em árvores

- Em profundidade
  - Um ramo da árvore de cada vez (= ???)



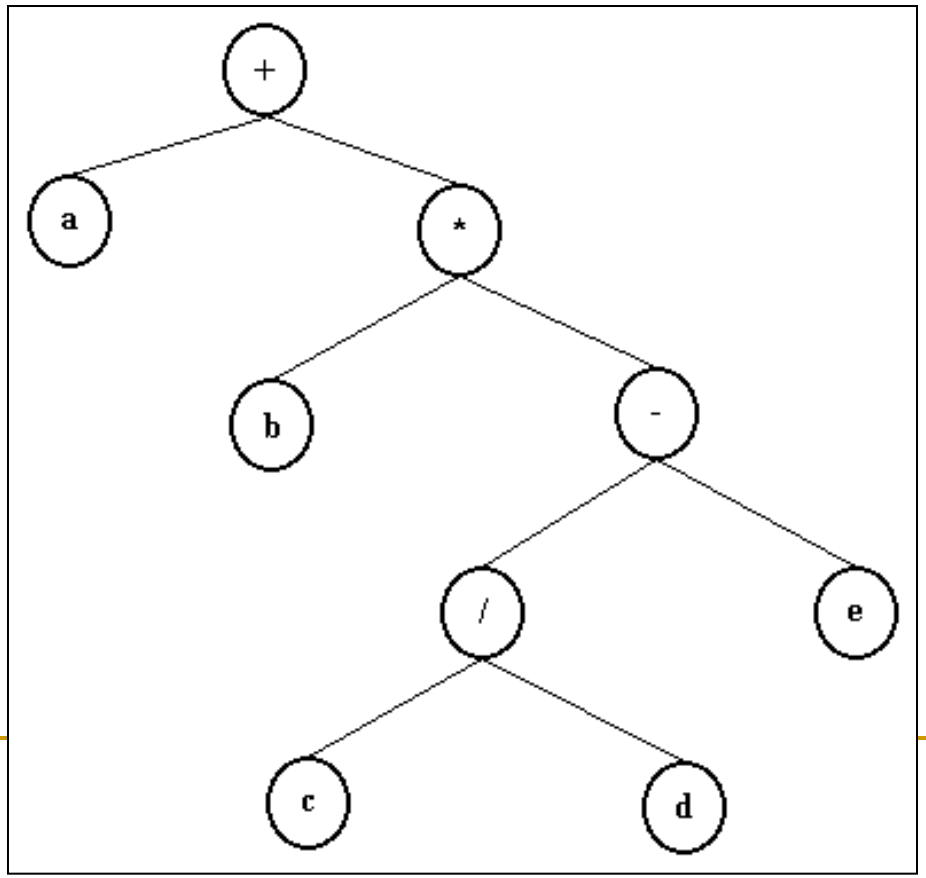
Percurso em árvores

- Em profundidade
  - Um ramo da árvore de cada vez (= pré-ordem)



Exercício: percurso em árvores

- Para a árvore abaixo, mostre quais seriam as saídas para os percursos em largura, profundidade (pré-ordem), em-ordem e pós-ordem

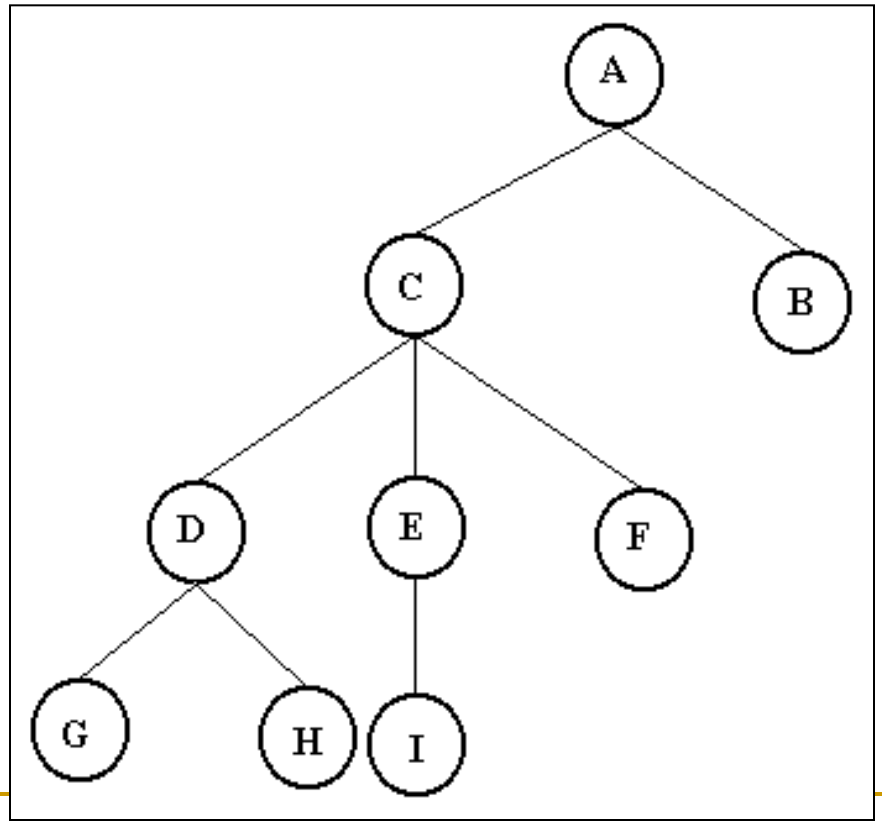


Percurso em árvores

- Em profundidade = pré-ordem
  - Usa pilha (explicita ou implicitamente)

Percurso em árvores

- Teste a estratégia com a pilha explícita



Percurso em árvores

- Em largura
  - Como implementar?

Percurso em árvores

- Em largura
  - FILA

    Se o nó raiz for diferente de NULL, ele entra na fila

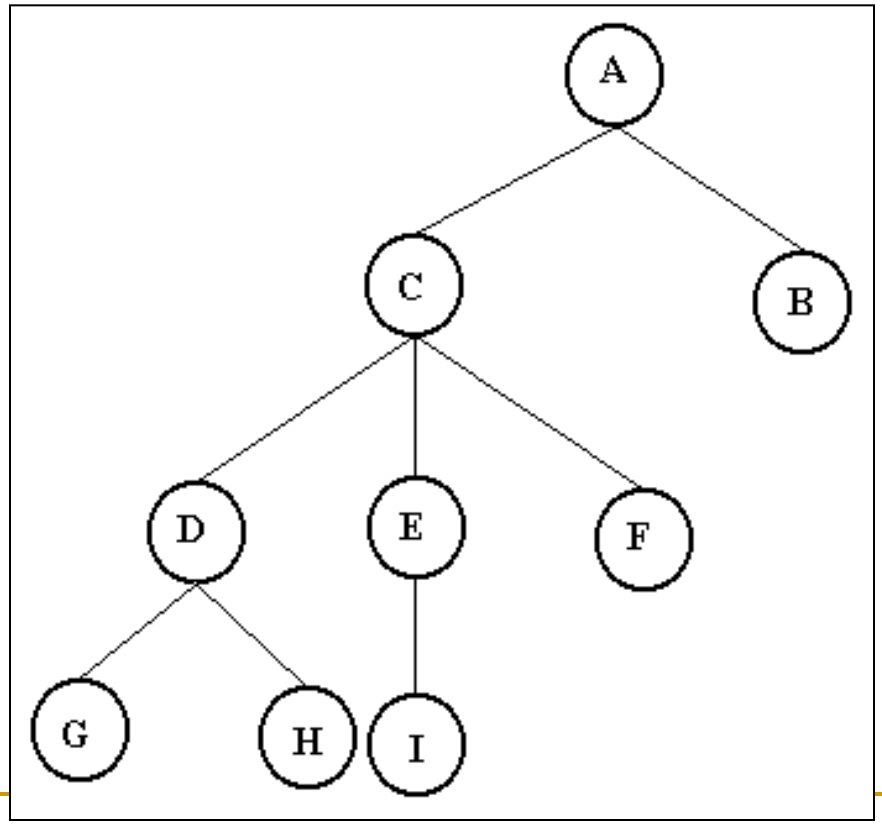
    Enquanto fila não vazia

        Retira-se/visita-se o primeiro da fila

        Se houver filhos desse nó, eles entram na fila

Percurso em árvores

- Teste a estratégia



Largura vs. profundidade

- Ao buscar um elemento

  - **Profundidade**
    - Vantagens?
    - Desvantagens?

Largura vs. profundidade

- Ao buscar um elemento

  - **Profundidade**
    - Menos memória para guardar nós não visitados
    - Pode buscar “para sempre”, demorando mais para achar o elemento

Largura vs. profundidade

- Ao buscar um elemento
  - **Largura**
    - Vantagens?
    - Desvantagens?

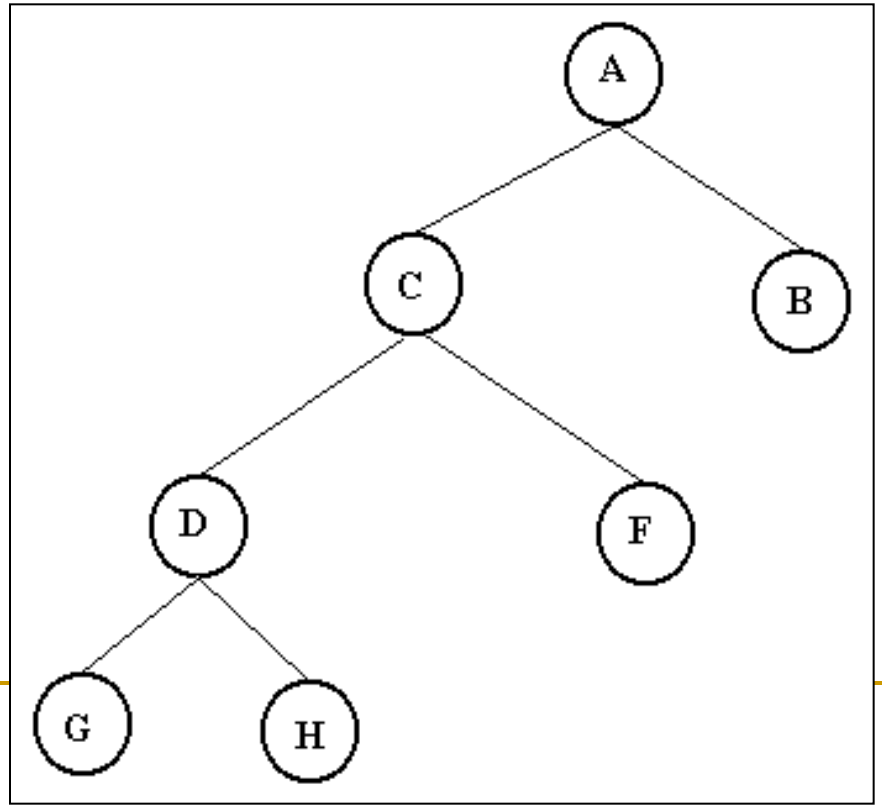
Largura vs. profundidade

- Ao buscar um elemento

  - **Largura**
    - Acha o elemento mais rapidamente
    - Mais memória para guardar nós não visitados

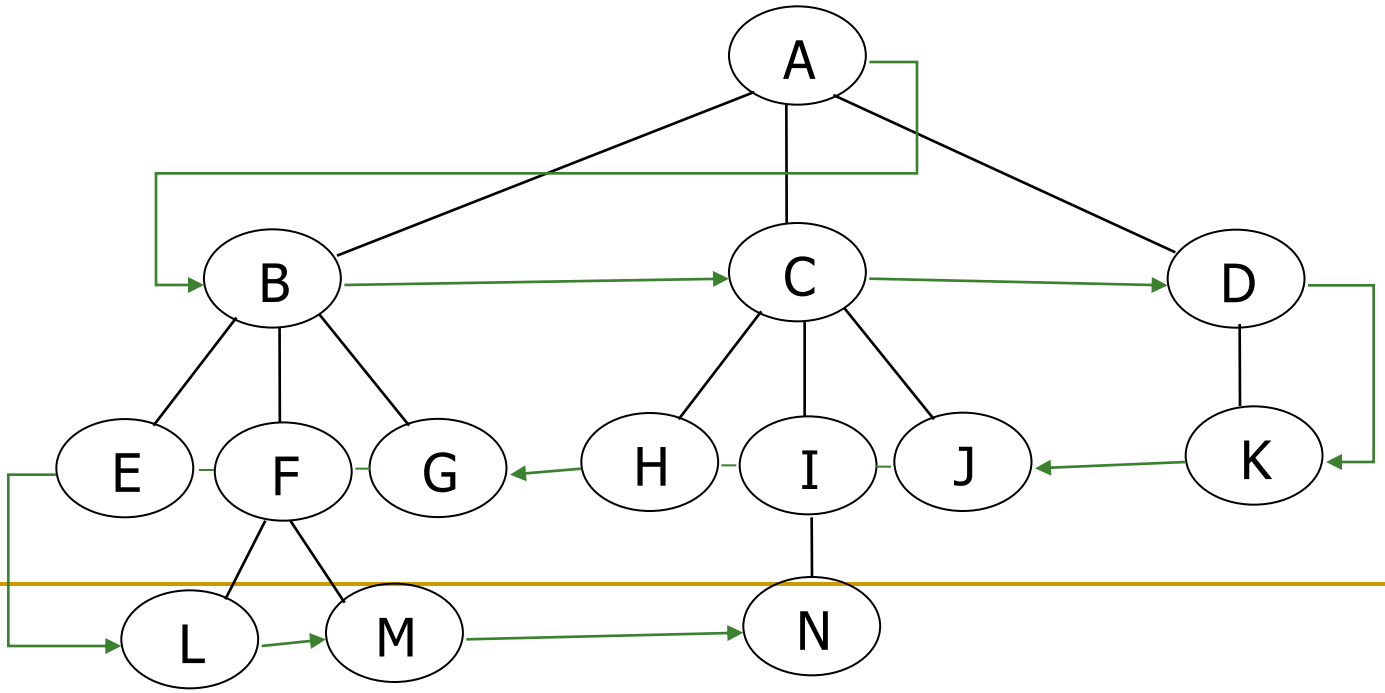
Largura vs. profundidade

- Use as estratégias para buscar o nó F
  - Quem se sai melhor em termos de nós visitados e de memória?



Percurso em árvores

- Árvores encadeadas
  - Mais ponteiros, mas pode facilitar busca e outras operações
    - Ponteiros podem ser configurados para qualquer tipo de busca
    - Filhos podem apontar para pais, para irmãos, para avôs, etc.



Exercícios

1) Função recursiva para verificar se uma AB é balanceada (usa a função altura)

2 Casos:

1) Se for nula: Balanceada
2) Se a diferença entre altura esq e dir for (0 ou 1 ou -1) e a sae for Balanceada e a sad for Balanceada

```
int arv_balanceada(Arv a){
if (a == NULL)
    return 1;
else
    {int dif = arv_altura(a->esq) - arv_altura(a->dir);
    return (arv_balanceada(a->esq) &&
                arv_balanceada(a->dir)
            && ((dif ==0) || (dif ==1) || (dif == -1)));
    }
}
```

Exercícios

2) Função recursiva para verificar se uma AB é perfeitamente balanceada (usa a função nro_nós)

2 Casos:

1) Se for nula: perf. Balanceada

2) Se a diferença entre nro_nós esq e dir for (0 ou 1 ou -1) e a sae for perf. balanceada e a sad for perf. Balanceada

```
int arv_perfbalanceada(Arv a){
if (a == NULL)
    return 1;
else
    {int dif = arv_numero_nos(a->esq) -
   arv_numero_nos(a->dir);
    return (arv_perfbalanceada(a->esq) &&
                arv_perfbalanceada(a->dir)
          && ((dif ==0) || (dif ==1) || (dif == -1)));
    }
}
```

Exercícios

3) Função para calcular o nível de um nó.

/* Dado o valor de um elemento, se ele está na árvore, retorna seu nível, retorna NULL c.c.
OBS.: Nivel da raiz = 1*/

Faça uma função para realizar a travessia em pré-ordem para achar o elemento e chame esta na função nível; nível cuida das inicializações de um parâmetro que vai retornar o nível

```
int arv_nivel(Arv a, elem item){
int n = 0, achou = 0;
arv_travessia(a, &n, item, &achou);
return n;
}
void arv_travessia(Arv a,int* niv, elem item, int* achou){
if(a!= NULL) {
    (*niv) ++;
if(a->info== item){
    *achou = 1;
    return;
}
arv_travessia(a->esq, niv, item, achou);
if(!*achou) {
    arv_travessia(a->dir, niv, item, achou);
    if(!*achou)
        (*niv) --;
}
}
return;
}
```