13a. Lista de Exercícios de Álgebra Linear - 14.11.2012

`Problemas envolvendo o produto interno`

1. Resolva os seguintes exercícios das páginas 192-193 da apostila do Zani de Álgebra Linear.

   (a) Ex. 12.72: 1, 2, 3, 4, 5

   (b) Ex. 12.73: 1, 2, 3

   (c) Ex. 12.74: 1, 2, 3

   (d) Ex. 12.75: 1, 2, 3

   (e) Ex. 12.76

2. Seja P uma matriz $n \times n$ simétrica tal que

$$X^t P X > 0 \quad \text{para todo } X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0.$$

   Mostre que a expressão

$$\langle X, Y \rangle = X^t P Y, \quad \text{para } X, Y \in \mathbb{R}^n$$

   define um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Observe que se P é a matriz identidade $n \times n$, então $\langle X, Y \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Reveja os EX. 12.72 1, 4, 5.

3. Mostre que dados quaisquer $n+1$ números reais distintos $a_0, a_1, \ldots, a_n$, eles determinam um produto interno $\langle , \rangle$ no espaço vetorial de $P_n(\mathbb{R})$ da forma

$$\langle p, q \rangle = p(a_0)q(a_0) + \cdots + p(a_n)q(a_n)$$

   para todos os polinômios p e q em $P_n(\mathbb{R})$.

4. Em cada caso abaixo, use o processo de Gram-Schmidt para ortonormalizar a base $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

   (a) $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

   (b) $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$

5. Determine uma base ortonormal em relação ao produto interno usual para o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$$

6. Resolva os exercícios EX. 12.77: 1, 2, 3 e Ex. 12.81 página 194 da apostila do Zani de Álgebra Linear.