ICMC – USP – SME 320
Estatística I – Engenharia de Produção
1ª prova – 1º/2010 – 4/5/2010
S O L U Ç Ã O

1. Um sistema de detecção de mísseis consiste de vários radares operando de forma independente. A probabilidade de cada radar detectar um míssil é 0,8. Se nenhum deles detecar o míssil, o sistema é ineficaz.

   (a) Se tivermos três radares, qual a probabilidade de que um míssil seja detectado por pelo menos dois radares?

   (b) Qual o menor número de radares necessário para garantir que a probabilidade de um míssil não ser detectado seja no máximo $0,0001$?

   Solução. Se um radar detectar um míssil, temos um evento sucesso, cuja probabilidade é $p = 0,8$. Em um sistema com n radares, a variável X representa o número de radares que detectam um míssil, sendo que $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Como os radares operam de forma independente, a distribuição de X é binomial com parâmetros n e $p = 0,8$.
   (a) São três radares ($n = 3$) e devemos calcular $P(X \geq 2)$, que é dada por

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2} 0,8^2 \times 0,2^1 + \binom{3}{3} 0,8^3 \times 0,2^0 = 0,896.$$

   (b) Um míssil não ser detectado significa que $X = 0$, cuja probabilidade é $P(X = 0) = \binom{n}{0} 0,8^0 \times 0,2^n = 0,2^n$, que decresce com n. Devemos encontrar o menor valor de n tal que $P(X = 0) \leq 0,0001$, ou seja, $0,2^n \leq 0,0001$, de modo que $n \geq 5,7$. Assim, o menor número de radares é 6.

2. Uma empresa telefônica opera com três estações (A, B e C). O número de situações de mau funcionamento ocorridas durante o período de um ano de acordo com diferentes tipos de problema é apresentado na Tabela 1. Se ocorreu mau funcionamento causado por erro humano, qual a probabilidade de que tenha ocorrido na estação C?

   Solução. De acordo com a Tabela 1, foram onservadas 43 situações. Os eventos "ocorreu mau funcionamento na estação C" e "ocorreu mau funcionamento por erro humano" são denotados por C e H, respectivamente. Pelo enunciado, devemos calcular $P(C|H)$. Supomos que a probabilidade de ocorrência de mau funcionamento é a mesma para todas as estações e todos os tipos de problema. Consultando a Tabela 1 calculamos

$$P(C|H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)} = \frac{5/43}{(7 + 7 + 5)/43} = \frac{5}{19} = 0,263.$$

   Observação. Obtenha a resposta aplicando a fórmula de Bayes.

Tabela 1: Ocorrências de mau funcionamento nas estações de acordo com diferentes tipos de problema.

Problema	Estação		
	A	B	C
Fornecimento de energia elétrica	2	1	1
Funcionamento de computadores	4	3	2
Funcionamento de equipamentos elétricos	5	4	2
Erros humanos	7	7	5

3. Uma indústria utiliza um plano de inspeção dos itens produzidos antes de serem transportados. Lotes com 25 itens são preparados para o transporte e uma amostra de três itens é testada (sem reposição). Se algum item defeituoso é encontrado na amostra, o lote é devolvido para que todos os itens sejam inspecionados. Se não forem encontrados itens defeituosos na amostra, o lote é despachado para transporte.

   (a) Qual a probabilidade de que um lote com três itens defeituosos seja transportado?

(b) Qual a probabilidade de que um lote com apenas um item defeituoso seja devolvido?

Solução. O plano envolve lotes com $N = 25$ itens dos quais $n = 3$ são inspecionados. Se um item inspecionado é defeituoso, temos um evento sucesso. Definimos a variável aleatória X como sendo o número de itens defeituosos na amostra inspecionada. Se $X > 0$, o lote é devolvido para inspeção de todos os seus 25 itens; caso contrário, é transportado. O número de itens defeituosos no lote é M. Como a amostra é selecionada sem reposição, a distribuição de X é hipergeométrica com parâmetros $N = 25$, M e $n = 3$.

(a) São $M = 3$ itens defeituosos no lote. Devemos calcular $P(X = 0)$, obtendo

$$P(X=0) = \frac{\binom{M}{0}\binom{N-M}{n-0}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{22}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{77}{115} = 0,670.$$

(b) O número de itens defeituosos no lote é $M = 1$. Devemos calcular $P(X > 0)$, que se reduz a $P(X = 1)$, pois $M = 1$, de forma que

$$P(X=1) = \frac{\binom{M}{1}\binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{24}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{3}{25} = 0,120.$$

4. Defeitos de fabricação ocorrem nos paineis de automóveis com uma média de $0,15$ defeito por painel. Diariamente alguns paineis são inspecionados em sequencia. Calcule a probabilidade de que sejam inspecionados cinco paineis até que seja encontrado o primeiro painel com defeito.

   Solução. Defininos a variável aleatória X como o número de defeitos encontrados em um dado painel, que ocorrem a uma taxa de $0,15$/painel. Supomos que a distribuição de X é Poisson com parâmetro $\mu = 0,15$. Se pelo menos um defeito é encontrado em um painel, dizemos que ele é defeituoso (evento sucesso), cuja probabilidade é igual a $p = P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\mu}\,\mu^0\,/\,0! = 1 - e^{-0,15} = 0,139$. Definimos a variável aleatória Y representando o número de paineis inspecionados até que seja encontrado o primeiro defeituoso. Sendo assim, a distribuição de Y é geométrica com parâmetro $p = 0,139$. Pelo enunciado, devemos calcular $P(Y = 5)$, dada por $P(Y = 5) = (1-p)^4 \times p = 0,0764$.

5. A vida útil em dias de um produto perecível é uma variável aleatória T com função distribuição acumulada

$$F(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{10000}{(100+t)^2}, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

   Em uma amostra de oito unidades deste produto, qual a probabilidade de que pelo menos cinco unidades tenham vida útil superior a 20 dias?

   Solução. Iniciamos com a variável aleatória X que representa o número de unidades com vida útil superior a 20 dias em uma amostra de $n = 8$ unidades. Portanto, "$T > 20$" constitui o evento sucesso com probabilidade $p = P(T > 20) = 1 - P(T \leq 20) = 1 - F(20)$. Utilizando a expressão de $F(t)$ acima obtemos $p = 0,694$. A distribuição de X é binomial com parâmetros $n = 20$ e $p = 0,694$. Pede-se o cálculo de $P(X \geq 5)$, dada por

$$P(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = \sum_{j=5}^{8} \binom{8}{j} 0,694^j \times 0,306^{8-j} = 0,796.$$