Automatos Finitos

Operações Fechadas sobre LR's
Aplicações

(H&U, 1969),(H&U, 1979),
(H;M;U, 2001) e (Menezes, 2002)

Operações que preservam a propriedade de ser uma LR

- Existem muitas operações que, quando aplicadas a LR resultam em uma LR (dizemos que são fechadas). Entre elas temos: união, complemento e intersecção (operações booleanas), concatenação, fechamento, diferença e reverso (a1a2...an → an...a2a1).

- Veremos a prova para as 6 primeiras propriedades acima.

- Elas são úteis também como ferramentas de construção de autômatos.

- Por exemplo, a propriedade da união ajuda a construir o autômato para:

  - L(M) = { x ∈ {0,1}* | o nro de 1's em x é múltiplo de 3 OU de 4}

  - e também o AF para o Analisador Léxico de um compilador

Propriedade de Fechamento das Linguagens da Hierarquia de Chomsky

Fechamento sobre	LR	LLC	LSC	LEF
união	S			
concatenação	S			
fechamento	S			
complemento	S			
intersecção	S			
diferença	S			
reverso	S			

Lema 3.1 (H&U, 69) – União

- A classe das LR é fechada sobre a união. Se L1 é LR e L2 é LR então $L1 \cup L2$ também é.

- PROVA: Sejam L1 e L2 reconhecidas por AF $M1 = (Q1, \Sigma1, \delta1, q0, F1)$ e $M2 = (Q2, \Sigma2, \delta2, r0, F2)$. Suponha $Q1 \cap Q2 = \emptyset$ e $s0 \notin Q1$; $s0 \notin Q2$.

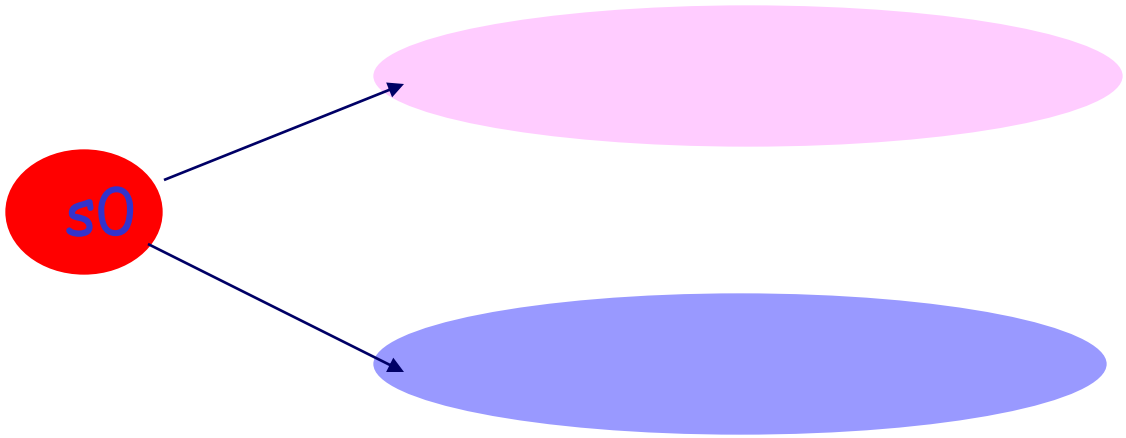
$M3 = (Q1 \cup Q2 \cup \{s0\}, \Sigma1 \cup \Sigma2, \delta3, s0, F)$ é um AFND onde:

- Se $\lambda \in L1$ ou $L2$ então $F = F1 \cup F2 \cup \{s0\}$ cc. $F = F1 \cup F2$

- $\delta 3$
  1) $\delta(s0,a) = \{\delta(q0,a), \delta(r0,a)\}$ para todo $a \in \Sigma 1 \cup \Sigma 2$
  2) $\delta(q,a) = \delta 1(q,a)$ para todo $q \in Q1$ e $a \in \Sigma 1$
  3) $\delta(q,a) = \delta 2(q,a)$ para todo $q \in Q2$ e $a \in \Sigma 2$

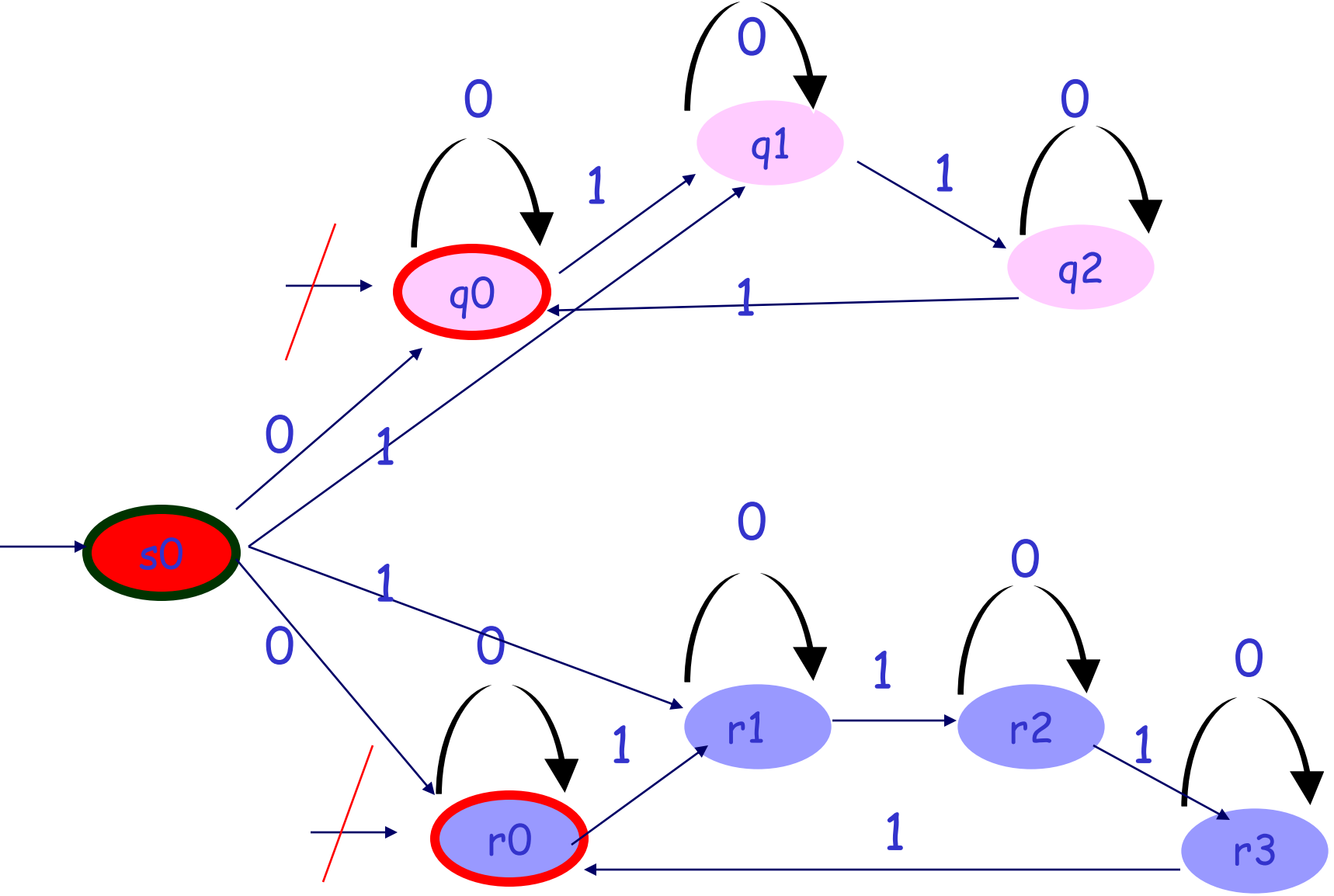
  Continuam os mesmos

$$L(M3) = L(M1) \cup L(M2)$$



Exemplo

- Use o Lema 3.1 para fazer um AFND que reconheça $L(M) = \{ x \in \{0,1\}^* \mid$ o nro de 1's em x é múltiplo de 3 OU de 4$\}$



M3 = ?

Outro Teorema para União de AF´s

- No livro do Sipser, pag 59 a união é feita através de um AF com movimentos nulos.

Lema 3.2 (H&U, 69) - Complemento

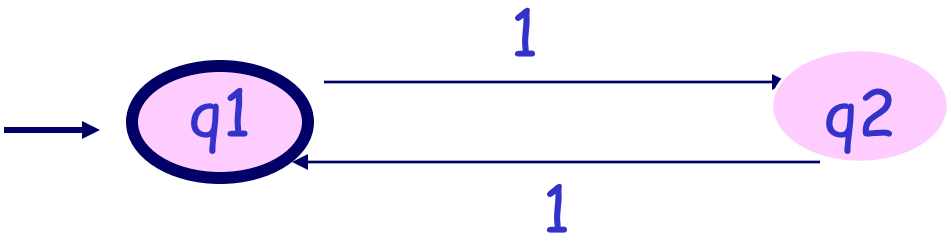
- A classe dos conjuntos aceitos por um AF é fechada sobre o complemento (Se L é uma LR então $\overline{L}$ também é.

- Prova: M1 = (Q, $\Sigma 1$,$\delta 1$, q0,F) é um AF que aceita um conjunto S1. Seja $\Sigma 2$ um alfabeto contendo $\Sigma 1$ (pode ser o mesmo) e d um estado $\notin$ Q. M2 aceita $\Sigma 2^*$ - S1.

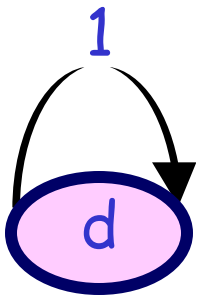
- M2 = $(Q \cup \{d\}, \Sigma 2, \delta 2, q0, (Q - F) \cup \{d\})$

- $\delta 2(q,a) = \delta 1(q,a)$ para cada $q \in Q$ e $a \in \Sigma 1$ (continua o anterior)
- $\delta 2(q,a) = d$ para cada $q \in Q$ e $a \in (\Sigma 2 - \Sigma 1)$ do particular estado
- $\delta 2(d,a) = d$ para cada $a \in \Sigma 2$

- Exemplo: Use o Lema 3.2 para reconhecer o complemento de $L(M1) = (x \in \{1\}^* |$ x possui um nro impar de 1's$\}$.
- Faça para $\Sigma 2 = \Sigma 1 = \{1\}$ e para $\Sigma 2 \subset \Sigma 1$, isto é, $\Sigma 2 = \{0...9\}$

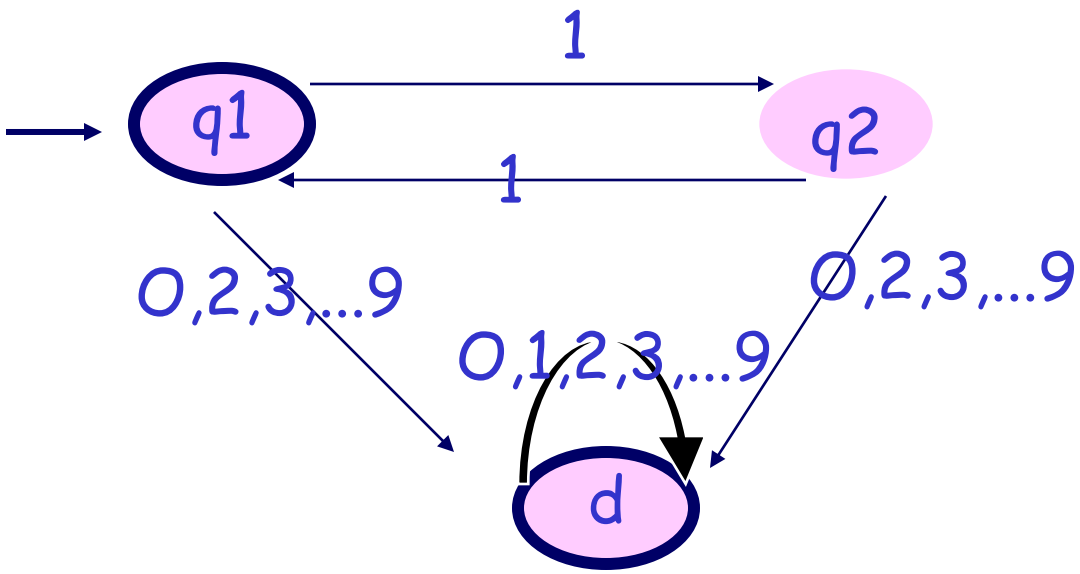


Reconhece um nro par de 1's



D é um estado inacessível que pode ser eliminado. Portanto M pode ser reduzido

$\overline{M}$ = ?



Só não reconhece nro impar de 1's

$\overline{M}$ = ?

Teo 3.6 (H&U, 69) - Intersecção

- A classe dos conjuntos aceitos por um AF forma uma Álgebra de Boole. Isto é, é uma coleção de conjuntos fechados sobre a união, complemento e intersecção.

- Prova: dos Lemas 3.1 e 3.2 e da Lei de Morgan, desde que a própria intersecção usa operações de união e complemento.

- $L1 \cap L2 = \overline{\overline{L1} \cup \overline{L2}}$

Teo 3.8 (H&U, 69) - Concatenação

- A classe dos conjuntos aceitos por um AF é fechada sobre o produto (ou concatenação).
- Prova: Seja M1 = (Q1, Σ1,δ1, q1,F1) aceitando L1 e M2 = (Q2, Σ2,δ2, q2,F2) aceitando L2.
- Assumimos Q1 e Q2 disjuntos e $\Sigma = \Sigma 1 = \Sigma 2$.
- M3 = (Q1 $\cup$ Q2, Σ,δ3, q1,F) é um AFND onde:

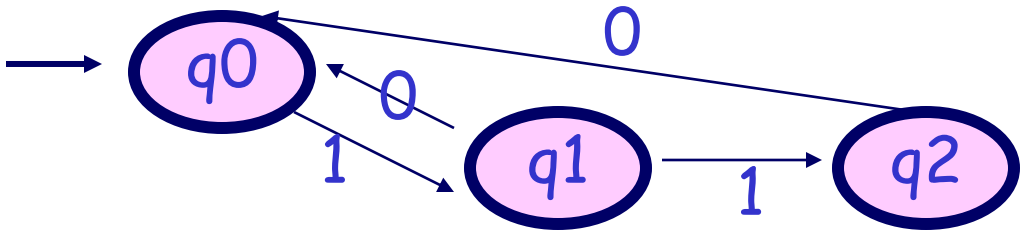
- $\delta 3(q,a) = \{\delta 1(q,a)\}$ para cada $q \in (Q1 - F1)$. M3 age como M1 para o começo da cadeia (possivelmente vazia)
- $\delta 3(q,a) = \{\delta 1(q,a), \delta 2(q2,a)\}$ para cada $q \in F1$. M3 continua em M1 ou vai para M2
- $\delta 3(q,a) = \{\delta 2(q,a)\}$ para cada $q \in Q2$. M3 age como M2 depois que a cadeia de entrada pertence a L2.

- Se $\lambda \notin L2$ então $F = F2$ (vai aceitar em M2)
- Se $\lambda \in L2$ então $F = F1 \cup F2$ (pode ser que não tenha nada em M2).

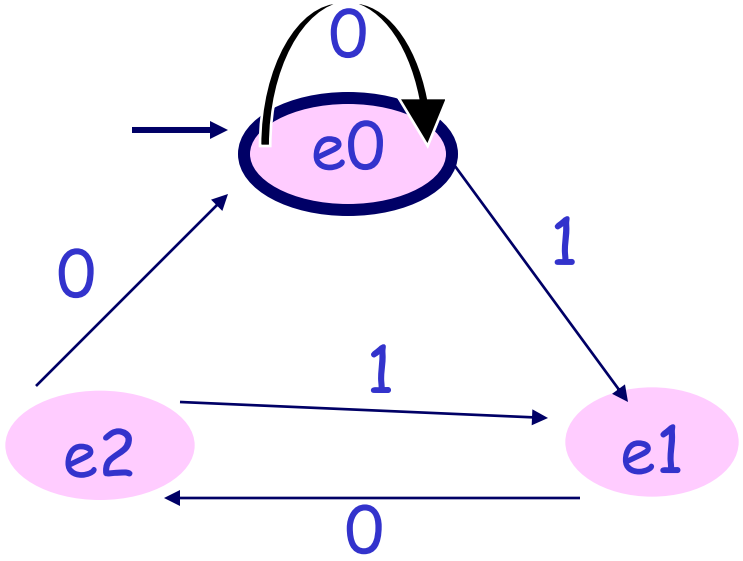
Exemplo

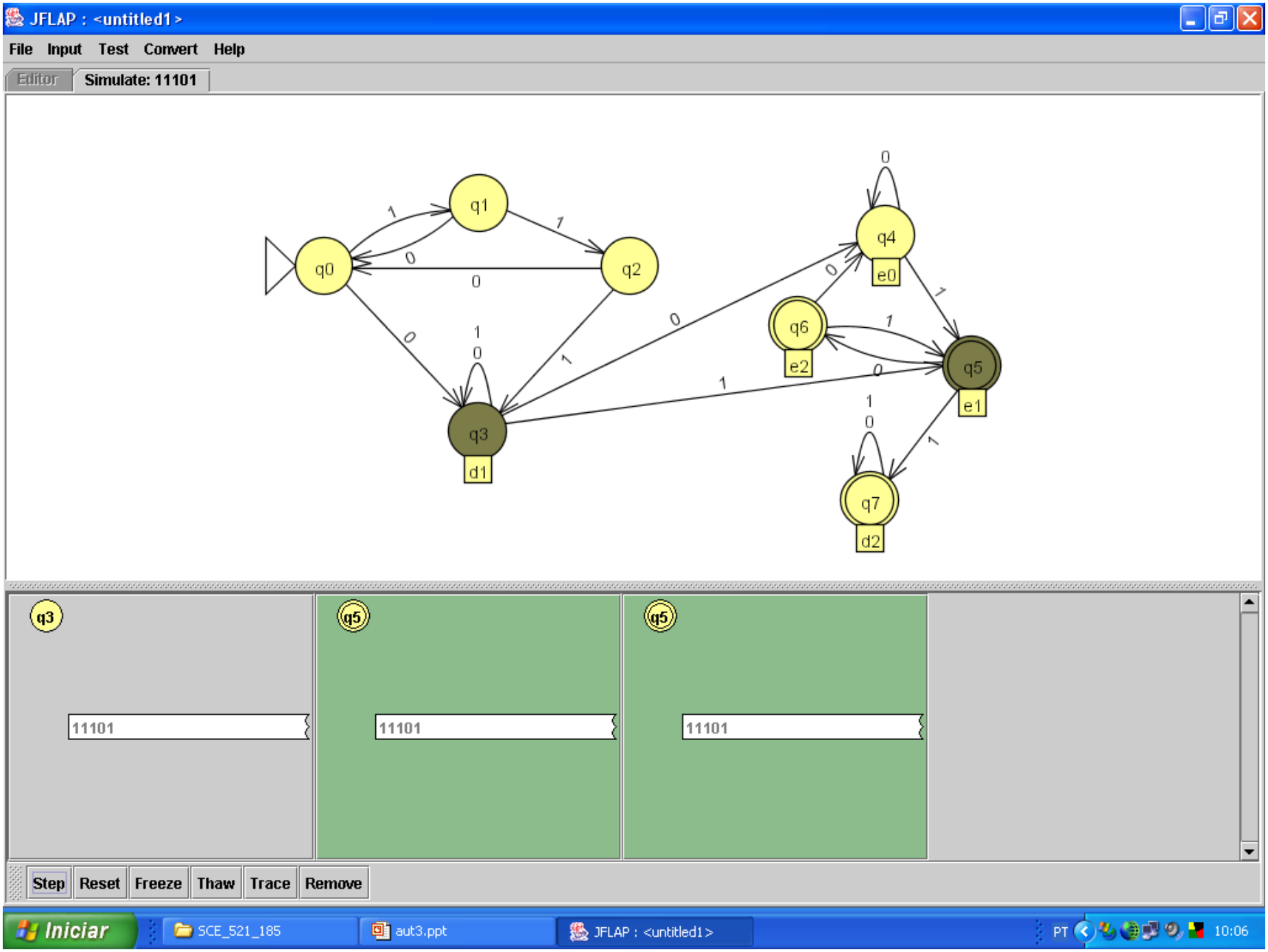
- Use o Lema 3.2 (complemento) e o Teo 3.8 (produto) para construir um AF M que a partir de M1 e M2 reconheça $L = \overline{L1} \,.\, \overline{L2}$

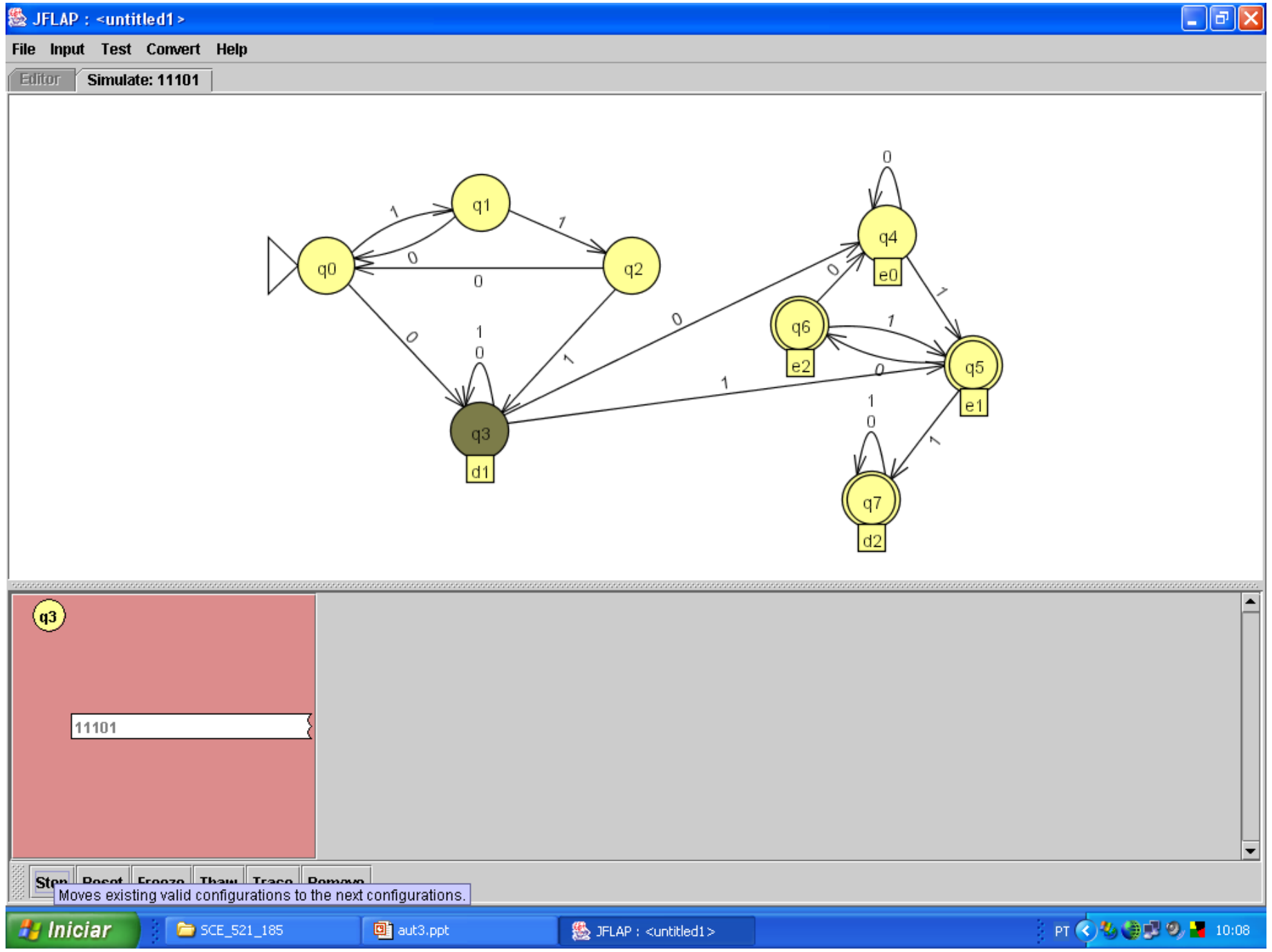
M1



M2




JFLAP : <untitled1>
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 11101
q0
q1
q2
q3
d1
q4
e0
q5
e1
q6
e2
q7
d2
0
1
q3
q5
q5
11101
11101
11101
Step
Reset
Freeze
Thaw
Trace
Remove
Iniciar
SCE_521_185
aut3.ppt
JFLAP : <untitled1>
PT
10:06


JFLAP : <untitled1>
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 11101
q0
q1
q2
q3
d1
q4
e0
q5
e1
q6
e2
q7
d2
q3
11101
Stop
Reset
Freeze
Thaw
Trace
Remove
Moves existing valid configurations to the next configurations.
Iniciar
SCE_521_185
aut3.ppt
JFLAP : <untitled1>
PT
10:08

Teo 3.9 (H&U, 69) - Fechamento

- A classe dos conjuntos aceitos por um AF é fechada sobre o fechamento.
- Prova: Seja $M = (K, \Sigma, \delta, qo, F)$ um AF que aceita L. $M' = (K \cup \{qo'\}, \Sigma, \delta', qo', F \cup \{qo'\})$ aceita L^*.
- ⇒ qo´ é também final pois $\lambda \in$ ao fecho

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \{\delta(q,a), qo)\} \text{ se } \delta(q,a) \in F \\ \{\delta(q,a)\} \text{ c.c. para } \forall\ q \in K \end{cases}$$

(todas as transições que estavam chegando no final, ganham uma cópia para voltar ao início)

$$\delta'(qo',a) = \begin{cases} \{\delta(qo,a), qo\} \text{ se } \delta(qo,a) \in F \\ \{\delta(qo,a)\} \text{ cc} \end{cases}$$

Exemplo

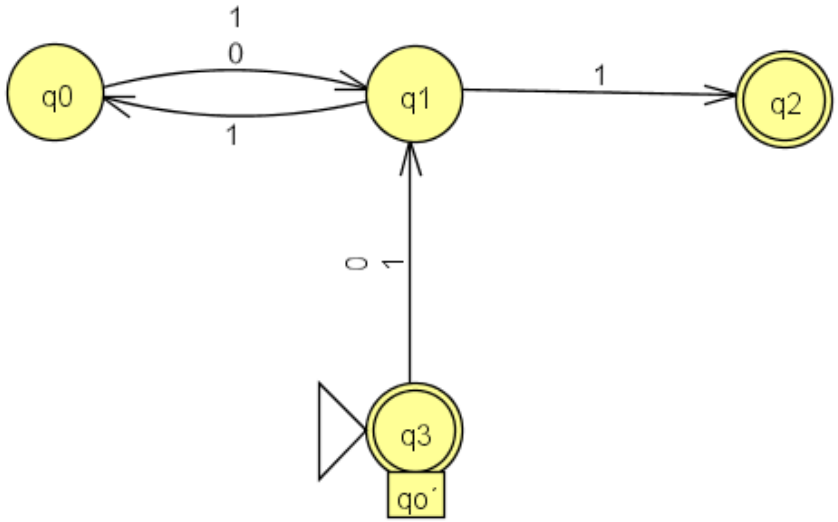
- Use o Teo 3.9 para construir um AF que reconheça o fecho de L = {01,11}

- L* = {λ, 01,11,0101,0111,1101,1111, 010101, ...}

JFLAP : <untitled1>

File Input Test Convert Help

Editor | Multiple Inputs



Input	Result
	Accept
01	Accept
11	Accept
0101	Accept
0111	Accept
1101	Accept
1111	Accept
010101	Accept

Run Inputs | Clear | Enter Lambda

Iniciar | Microsoft PowerPoint ... | SCE_521_185 | JFLAP : <untitled1> | PT | 19:54

Teo 4.10 (H,M,U,2001) Diferença

- Se L e M são linguagens regulares então L – M também são.

- Prova: $L - M = L \cap \overline{M}$. Como o complemento e a intersecção de linguagens regulares também são regulares, L – M também é.

Aplicações: Analisadores Léxicos

- Analisadores léxicos (AL) de compiladores. O AL é a interface entre o programa fonte e o resto do compilador. Ele é responsável principalmente por:
  - "empacotar" os caracteres do programa e lhes dar um rótulo que será usado pelo analisador sintático montar a árvore sintática.
  - Os rótulos são:
    - identificadores,
    - os nomes dos símbolos simples (<, =, [,), etc.),
    - os nomes dos símbolos compostos (:= , <>, <=, .., etc.),
    - constantes inteiras,
    - constantes reais,
    - constantes literais (cadeias e caracteres)
    - constantes lógicas (true/false),
    - o nome das palavras-chaves.

AL são modelados por AF para depois serem programados em uma linguagem de programação.

Outra opção é utilizar um gerador de analisadores léxicos como o Lex, Flex.

A entrada para esses geradores é uma expressão regular, assunto que veremos logo e a saída é um programa que gerencia uma enorme tabela de transição de estados.

- Já fizemos um AF para identificadores, inteiros do Pascal, e operadores relacionais
  - Como exercício façam para os outros elementos do Vt.

- Atentem que os números reais, por exemplo, não são iguais em todas as linguagens. Algol e Fortran permitem 5. e .5 quando Pascal, por exemplo, não!!

- Para a modelagem de um AL podemos unir todos os AF's em um único que reconhecerá todo o Vt da linguagem escolhida.
- Nele também representamos o tratamento dado aos símbolos br/CR/LF/tab e comentários
  - porém NÃO podemos reconhecer/aceitar esses elementos.

- Observem, entretanto que a modelagem com AF mostra o que o Analisador Léxico deve reconhecer MAS não mostra como.
  - Por exemplo, nada diz sobre o que fazer quando uma cadeia pode ter 2 análises como é o caso de:

  2.3 (real ou inteiro seguido de ponto seguido de real)

  Ou

  <= (menor seguido de igual ou menor igual)

  OU

  Program (identificador ou palavra reservada program)

Regras de Desambiguação

- Assim, precisamos de regras para desambiguar esses casos.
- Usamos as regras:
  - escolha a maior cadeia
  - Dê preferência para a formação de:
    - palavras-reservadas em detrimento de identificadores
  - Estas regras estão embutidas em geradores de Analisadores Léxico, como o LEX, que é assunto de uma monografia e apresentação:
  - O Utilitário Lex e as ER estendidas