1. Verifique que a série converge uniformemente no intervalo dado.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$ em $[-r,r]$, onde $r>0$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k$ em $[-r,r]$, com $0<r<1/2$.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$ em $[-r,r]$, com $0<r<1$.

2. Seja $s=s(x)$ dada por $s(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k$. Prove que para todo $t\in]-1,1[$,

$$\int_0^t s(x)dx = \frac{t^2}{1-t}.$$

   Conclua que para todo $x\in]-1,1[$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

3. Seja a_k, $k\geq 1$, uma sequência numérica dada. Suponha que a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)$ convirja uniformemente em $]-\pi,\pi[$. Seja $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)$, $x\in]-\pi,\pi[$. Prove que para todo natural $k\geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

4. Sejam a_k, $k\geq 0$, e b_k, $k\geq 1$, sequências numéricas dadas. Suponha que a série

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)+b_k\cos(kx)\right]$$

   convirja uniformemente em $]-\pi,\pi[$. Seja

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)+b_k\cos(kx)\right],\quad x\in]-\pi,\pi[.$$

Prove que para todo natural $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad k \geq 0,$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \quad k \geq 0.$$

5. Considere a função f dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$$

   (a) Qual o domínio de f?
   (b) Mostre que f é contínua.
   (c) Justifique a igualdade:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^4}.$$

   (d) Prove que para todo x no domínio de f,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$$

   Justifique todas as suas afirmações.

6. Determine o raio de convergência da série. Para quais valores de x a série converge a) absolutamente, b) condicionalmente.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$
   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4x+1)^n$
   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$
   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências ímpares de x são nulos. Para contornar essa dificuldade faça $y = x^2$ e analise a série resultante)

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências pares de x são nulos.)

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}(x-3)^n$

7. Determine as expansões em séries de potências das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas.

(a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

(b) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$

8. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$$

9. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

10. Mostre que $\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}(x-2)^n,\ 0 < x < 4.$

11. Use séries de potências para aproximar a integral $\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$ com precisão de quatro casas decimais.

12. Dado um número inteiro positivo k, considere a k-ésima função de Bessel de primeira espécie, definida por

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} \qquad \text{(série de Bessel)}$$

Determine o raio de convergência da série de Bessel.

13. Mostre que a função de Bessel J_0 é solução da edo:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$