LABIC

SCE-5809 - REDES NEURAIS
Redes Neurais Multi-Camadas – Parte 3

Profa. Roseli Ap. Francelin Romero

LABIC

Teorema de Aprox. Universal

- Qual é o número mínimo de camadas num PMC que fornece uma aproximação para qualquer mapeamento contínuo?
- Cybenko, 1989 – mostrou pela primeira vez que uma rede com uma única camada intermediária é suficiente para aproximar uniformemente qualquer função contínua definida num hipercubo unitário.

LABIC

Teorema de Aprox. Universal

Teorema: Seja g(.) uma função contínua limitada, monótona estritamente crescente. Seja Ip, um hipercubo unitário p-dimensional e C(Ip): o espaço das funções contínuas em Ip. Então, dado qualquer função $f \in C(Ip)$ e $\varepsilon>0$, existe um inteiro M e constantes reais α_i, θ_i, w_{ji}, onde i=1,2,...,M e j=1,...,p, tal que pode-se definir:

$$F(x_1,...,x_p) = \sum \alpha_i \, g \left(\sum w_{ji} \, x_j - \theta_i\right) \qquad (1)$$

com

$$| F(x_1,...,x_p) - f(x_1,...,x_p) | < \varepsilon \quad \{x_1,...,x_p\} \in Ip$$

LABIC

Teorema de Aprox. Universal

- a função sigmoid ou logística é contínua, estritamente cresc. e limitada e portanto satisfaz as condições impostas na função g(.).
- A equação (1) representa a saída de PMC:
  - a rede tem p nós de entrada e uma única camada intermediária de M nós.
- O neurônio i tem pesos: w_{1i}, ..., w_{pi} e limiar θ_i
- A saída da rede é uma C.L. das saídas dos neurônios intermediários, com α_i

LABIC

Teorema de Aprox. Universal

- O teorema é um teorema de Existência, pois ele fornece uma justificativa para a aprox. de funções contínuas. SUFICIENTE
- Entretanto, o teorema não afirma que uma única camada é um número OTIMO.

LABIC

Teorema de Aprox. Universal

- Na prática, nem sempre se dispõe de uma função contínua e nem de uma camada intermediária de tamanho qualquer.
- Chester, 1990 e Funahashi, 1989, defendem o uso de duas camadas interm., pois, torna a aprox. mais maleável.

Teorema de Aprox. Universal

- Caracter. Locais são extraídas na primeira camada. Alguns neurônios na primeira camada são usados para particionar o espaço em várias regiões, e outros aprendem as caract. Locais daquelas regiões.
- Caracter. Globais são extraídas na segunda camada. Um neurônio na 2a. Camada combina as saídas de neurônios da primeira que estão operando numa região particular do espaço de entrada e assim aprende caract. Globais daquela região.

Velocidade de Aprendizado

- O algoritmo **BP** fornece uma "aproximação" para a trajetória no espaço dos pesos
- Quanto menor o valor de η, menor as mudanças nos pesos e mais suave será a trajetória. APRENDIZADO LENTO
- Se, η é muito grande, o aprendizado torna-se rápido então a rede pode tornar-se INSTÁVEL

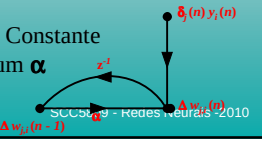
Termo Momentum

É um método simples de aumentar a velocidade de aprendizado e evitar o perigo de instabilidade, como mostrado por Rumelhart et al., 1986.

$$\Delta w_{j,i}(n) = \eta\, \delta_j(n)\, out_i(n) + \alpha\, \Delta w_{j,i}(n-1) \quad (\alpha)$$

onde α é geralmente um número positivo chamado CONSTANTE MOMENTUM

Efeito da Constante Momentum α



A equação (α) é chamada *REGRA DELTA GENERALIZADA*. Se α =0 ⇒ REGRA DELTA

Efeito da Constante α

Vamos considerar uma série de tempo com índice ***t*** (de **0** a ***n***)

A equação (α) pode ser vista como uma equação diferença de primeira ordem em relação a $\Delta w_{j,i}(n)$. Resolvendo

$$\Delta w_{j,i}(n) = \eta \sum_{t=0}^{n} \alpha^{n-t}\, \delta_j(t)\, out_i(t)$$

que representa uma série de tempo comprimido ***n+1***. Mas:

$$\delta_j(n)\, out_i(n) = \frac{-\partial E(n)}{\partial w_{j,i}(n)} \qquad \therefore \Delta w_{j,i}(n) = -\eta \sum_{t=0}^{n} \alpha^{n-t} \frac{\partial E(t)}{\partial w_{j,i}(t)}$$

1. O ajuste atual $\Delta w_{j,i}(n)$ representa a soma de uma série de tempo ponderada exponencialmente convergente $\Rightarrow 0 \le |\alpha| < 1$

Efeito da Constante α

2.Quando $\frac{\partial E(t)}{\partial w_{j,i}(t)}$ tem o mesmo sinal algébrico em iterações consecutivas, então a série cresce em magnitude então os pesos são ajustados por uma quantia grande

Portanto **BP** tende a acelerar a "descida" nas regiões de descida da superfície do erro.

3. Quando $\frac{\partial E(t)}{\partial w_{j,i}(t)}$ tem sinais opostos em iterações sucessivas então a série diminui em magnitude e $\Delta w_{j,i}(n)$ é atualizado por uma quantia pequena. Então a inclusão do termo momentum tem o ***"efeito de estabilização"*** nas direções em que o sinal oscila.

Efeito da Constante α

Portanto o termo momentum pode ter efeitos benéficos no comportamento do aprendizado do algoritmo, ele pode evitar que o processo termine num mínimo local na superfície de erro.

OBS.: o parametro η foi considerado constante

(1) n_{ji}**:** dependente da conexão. Fatos interessantes ocorrem se n_{ji} é tomado diferente em diferentes partes do algoritmo

(2) restringir o número de pesos a serem ajustados $n_{ji} = 0$ para o peso $w_{j,i}$

(3) Modo no qual as camadas ocultas são interconectadas. No procedimento, supomos que cada camada recebe

LABIC

Efeito da Constante α

entradas apenas das unidades da **camada anterior**. Mas não existe nenhuma RAZÃO para isto. Se este não for o caso, existem dois tipos de sinais de erro:

- Um sinal de erro que resulta de comparação direta do sinal saída daquele neurônio com uma resposta desejada.
- Um sinal de erro que é passado através de outras unidades cuja ativação ele afeta.

LABIC

Modos de Treinamento

Aprendizado **BP** resulta de muitas apresentações de um conjunto de treinamento de exemplos. Uma apresentação COMPLETA do conjunto de treinamento inteiro $\Rightarrow$ 1 CICLO (1 epoch)

O processo de aprendizagem é repetido CICLO após CICLO até que os pesos sinápticos e níveis threshold se **estabilizam**.

Tomar os pesos numa forma ALEATÓRIA $\Rightarrow$ pesquisa no espaço dos pesos ESTOCÁSTICA.

1) MODO PADRÃO/PADRÃO

Atualização nos pesos é feita após a apresentação de cada exemplo de treinamento. Um ciclo consistindo de N exemplos

LABIC

Modos de Treinamento

de treinamento arranjados na ordem:

$$\{[x(1), d(1)], \ldots\ldots, [x(N), d(N)]\}$$

$[x(1), d(1)] \rightarrow$ Cálculos forward/backward atualização pesos/threshold

$[x(2), d(2)] \rightarrow$ Cálculos forward/backward atualização pesos/threshold

Desta forma, a variação média nas mudanças dos pesos é :

$$\Delta \hat{w}_{j,i} = 1/N \sum_{n=1}^{N} \Delta w_{j,i}(n) = -\eta/N \sum_{n=0}^{N} \frac{\partial E(n)}{\partial w_{j,i}(n)} = -\frac{\eta}{N} \sum_{n=1}^{N} e_j(n) \frac{\partial e_j(n)}{\partial w_{j,i}(n)}$$

LABIC

Modos de Treinamento

2) MODO BATCH

Atualização dos pesos é feita depois da apresentação de todos os exemplos de treinamento que constituem um ciclo.

Para um ciclo particular, função custo com o erro quadrático médio: $\mathcal{E}_{av} = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j \in C} e_j^2(n)$ onde **C** denota o conjunto de índices correspondentes aos neurônios da camada de saída. e_j é o sinal do erro neurônio j correspondente ao exemplo de treinamento w.

$$\Delta w_{j,i} = -\eta \frac{\partial \mathcal{E}_{av}}{\partial w_{j,i}} = -\frac{\eta}{N} \sum_{n=1}^{N} e_j(n) \frac{\partial e_j(n)}{\partial w_{j,i}}$$

Conjunto inteiro ter sido apresentado

LABIC

Modos de Treinamento

Claramente $\Delta \hat{w}_{j,i}$ é diferente de $\Delta w_{j,i}$. $\Delta \hat{w}_{j,i}$ representa uma ***estimativa*** $\Delta w_{j,i}$. Do ponto de vista "on-line" o **MODO PADRÃO** é o mais preferido. Além disso, os exemplos de treinamento são aleatoriamente apresentados $\Rightarrow$ atualização nos pesos é ESTOCÁSTICA $\Rightarrow$ menos provável o algoritmo BP estacionar num **MÍNIMO LOCAL**

Por outro lado, **MODO BATCH** fornece uma estimativa mais precisa do ***VETOR GRADIENTE***. De qualquer forma, a eficiência dos dois modos depende do problema que se tem em mãos(Hertz,1991)

LABIC

CRITÉRIO DE PARADA

Não se pode, em geral, mostrar a CONVERGÊNCIA do algoritmo **BP** e nem existem critérios bem definidos para parar seu processamento. Para formular um critério $\Rightarrow$ propriedades de mínimo local ou global da superfície de erro.

Seja w^* denotar o vetor mínimo local ou global

1) Uma condição necessária para w^* ser mínimo:

gradiente $g(w) \rightarrow$ (derivada de 1ª ordem) da superfície de erro com relação a w seja ***zero*** em $w = w^*$.

"O algoritmo **BP** é considerado ter convergido quando a norma do vetor gradiente é menor que um certo ε, ε peq. arbitrário."

LABIC

CRITÉRIO DE PARADA

2) Função custo $\mathcal{E}_{av}(w)$ é estacionária em $w = w^*$.

"O algoritmo **BP** é considerado ter convergido quando a taxa de mudança no erro quadrático médio por ciclo é suficientemente pequena"

Tipicamente, é considerado pequena uma taxa de mudança no erro quadrático de **0.1** a **1%** por ciclo

ou **0.01%** por ciclo

Kramer e Sangiovanni-Vicentelli(1989) sugere um critério de convergência:

O algoritmo BP termina no vetor peso w_{final} *quando* $\| g(w_{final}) \| \leq \varepsilon$, onde ε é suficiente pequeno, ou $|| \mathcal{E}_{av}(\text{ final }) || \leq \tau$ onde τ é suficiente pequeno.

LABIC

INICIALIZAÇÃO

O primeiro passo do algoritmo **BP** é a inicialização da rede.

Uma boa escolha para os parâmetros livres(pesos sinápticos e threshold) podem contribuir significativamente no sucesso do aprendizado.

- **Informação disponível**
- **Nenhuma informação é disponível ?**

  Pesos aleatoriamente, isto é, inicializar os pesos com valores uniformemente distribuídos num intervalo pequeno.
- **Escolha Errada ⇒ Saturação Prematura**

  Esse fenômeno refere-se a uma situação onde o erro quadrático permanece constante por um período de tempo, mas depois continua a diminuir depois que este período é concluído.

LABIC

INICIALIZAÇÃO

Vários fatos interessantes podem ocorrer:

1) Supor que para um particular padrão de treinamento, o nível de ativação interna de um neurônio saída tem um valor cuja **magnitude é grande**. Como a função é a "sigmoid" ⇒ ***y* = 1 *ou* *y* = -1.** Em tal caso, diz-se que o neurônio está em **saturação.**

2) Se ***y*** está mais próximo de **1** quando a saída desejada é **-1** ou vice-versa, o neurônio está **incorretamente saturado.** Quando isso ocorre, o ajuste nos pesos será pequeno, embora o erro seja de magnitude grande e a rede levará um longo tempo para corrigir isto (Lee,1991).

3) No estágio inicial de **BP** podem existir neurônios não-saturados e incorretamente saturados.

LABIC

INICIALIZAÇÃO

Para os não-saturados ⇒ os pesos mudam rapidamente.

Incorretamente saturados ⇒ permanecem saturados por algum tempo

⇒ **Fenômeno de Saturação Prematura** pode ocorrer com $\mathcal{E}$ permanecendo constante. Em **LEE(1991)** uma fórmula para a probabilidade de **Saturação Prematura** foi obtida para o **modo Batch**

A essência desta fórmula pode ser: [**Haykin, 1994**]

1) Saturação Incorreta: é evitada escolhendo valores iniciais dos pesos sinápticos e níveis threshold, uniformente distribuídos num intervalo pequeno.

2) Saturação Incorreta: é menos provável quando o número de neurônios intermediários é mantido baixo.

LABIC

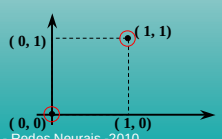
INICIALIZAÇÃO

3) Saturação Incorreta: raramente ocorre quando os neurônios da rede operam em sua regiões lineares

Segundo [**Haykin,1994**], para o **Modo Padrão** de atualização dos pesos, os resultados mostram uma tendência similar ao **modo Batch**

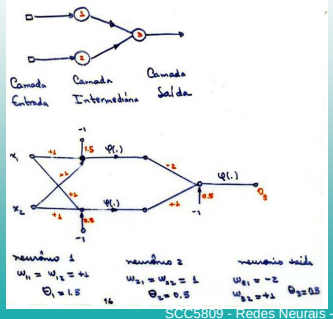
O PROBLEMA XOR

(0, 0) → 0
(1, 0) → 1
(0, 1) → 1
(1, 1) → 0



LABIC

INICIALIZAÇÃO



Verificar o comportamento da rede XOR durante o aprendizado

Sugestões de melhoria de desempenho

Existem algumas sugestões para o algoritmo **BP** trabalhar melhor (**RUSSO-1991, GUYON-1991**)

1) Função Ativação: Impar $\varphi(-v) = -\varphi(v)$ Esta condição não é satisfeita pela função **LOGÍSTICA**, mas sim pela função sigmoid não-linear na forma de tangente hiperbólica. Esta função é dada por:

$$\varphi(-v) = a \tanh(bv)$$

onde a e b são constantes. Esta função nada mais é que a função logística transladada:

$$a \tanh(bv) = a\left[\frac{1 - e^{-bv}}{1 + e^{-bv}}\right] = \frac{2a}{1 + e^{-bv}} - a$$

Valores adequados para a e b são: $a = 1.716$ e $b = 2/3$ **(Guyon,1991)**

Sugestões de melhoria de desempenho

2) É importante que os valores alvo (resposta desejada **d**) sejam escolhidos no mesmo intervalo onde se encontram os valores assumidos pela função de ativação. Se o valor limite da função sigmoid é: $+a \Rightarrow d_j = a - \varepsilon$, onde ε é uma constante positiva apropriada.

Por exemplo, se a função ativação for a tangente hiperbólica com

$a=1.716 \Rightarrow \quad \varepsilon = 0.716$ e assim $d_j = \pm 1$

Se isso não for feito o algoritmo **BP** tende a dirigir os parâmetros livres da rede $\rightarrow : \Rightarrow$ **processo de aprendizado muito lento.**

3) Inicialização dos parametros livres deve ser aleatória num intervalo pequeno. Contudo, a magnitude do intervalo não deve ser tão pequena, o que pode causar que os gradientes sejam também muito

Sugestões de melhoria de desempenho

pequenos e o aprendizado, portanto, inicialmente muito lento.

Para uma função de ativação impar na forma de uma tangente hiperbólica, com constantes a e b dadas acima, uma escolha possivel é:

$$\left(-\frac{2.4}{F_i}, \frac{2.4}{F_i}\right)$$

onde F_i é o número total de entradas na rede.

4) É desejável que todos os neurônios numa rede multi-camadas ***aprendam na mesma velocidade.*** Tipicamente, as últimas camadas→ gradientes locais maiores que as camadas iniciais. Então, η deve ser menor para as últimas camadas do que para as primeiras camadas. Neurônios com muitas entradas teriam um valor de η menor que com poucas entradas.

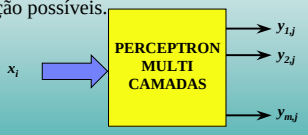
Sugestões de melhoria de desempenho

O modo **PADRÃO** é mais indicado que o modo **BATCH**, na atualização dos pesos. Em **PROBLEMAS CLASSIF.** envolvendo dados grandes e redundantes o modo **PADRAO é mais rápido.**

Entretanto, a atualização padrão é mais dificil para ser **PARALELIZADA.**

Representação 1-de-m da Saida e Regra de Decisão

Na teoria, para um problema de classificação envolvendo ***m-classes***, para o qual a união das m classes distintas forma o espaço inteiro, precisamos de ***m saidas*** para representar todas as decisões de classificação possíveis.



$yj = [y_{1,j}, y_{2,j}, \ldots, y_{m,j}]^T = [F_1(x_j), F_2(x_j), \ldots, F_m(x_j)]^T = F(x_j)$

onde F e uma função vetorial. " Depois do treinamento do **PMC,** qual seria a regra de decisão para classificar as m saídas da rede?"

Representação da Saida e Regra de Decisao

Supondo, agora, que a rede seja treinada com valores alvo binários, isto é: $d_{k,j} = \begin{cases} 1 \text{ quando } x_j \in C_k \\ 0 \text{ quando } x_j \notin C_k \end{cases}$. Baseada, nesta notação, a classe C_k é representada por um vetor alvo m-dimensional **[0,0,0, …, 1,0,0]**

Podemos classificar o vetor aleatório x como pertencente a classe C_k se $F_k(x) > F_j(x) \; \forall \; j \neq k$ **(2)** onde $F_k(x)$ e $F_j(x)$ são elementos da função vetorial $F(x) = [F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x)]$

K-ésimo elemento

OBS: Um valor maior único existe com probabilidade **1** quando as distribuições a posteriori são distintas (veremos mais tarde!!!).

Esta regra de decisão tem a vantagem de produzir decisões não-ambíguas sobre a regra comum que designa x à classe C_k se $F_k(x)$ é maior que algum threshold, o que pode conduzir a múltiplas classes.