Determinação de uma solução básica inicial

Para que o método simplex possa ser aplicado, precisamos de uma solução básica factível inicial.

Minimizar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

sujeito a: $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

em que $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Após a introdução das variáveis de folga, digamos, $\mathbf{x}_f$, temos:

Minimizar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

sujeito a: $\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_f = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_f \geq \mathbf{0}$,

de modo que a matriz dos coeficientes das restrições agora é dada por

[A I]

e uma partição básica factível é dada por:

- **B** = **I**: as variáveis básicas são as variáveis de folga $\mathbf{x_B} = \mathbf{x}_f$
- N = A: as variáveis não-básicas são as variáveis originais $x_N = x$,

e a solução básica factível é dada por:

$$\begin{cases} \mathbf{x_B} = \mathbf{x}_f = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x_N} = \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

<u>Em geral, uma solução básica factível não está disponível e deve ser encontrada.</u>

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\text{sujeito a: } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

em que **A** não tem uma sub-matriz identidade ($\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$).

Como encontrar uma partição nas colunas da matriz **A**,

$\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$,

tal que exista $\mathbf{B}^{-1}$ e $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, isto é, uma partição básica factível.?

Seja **A** uma matriz 10×20 (m = 10 e n = 20). Precisamos identificar 10 colunas de **A** que sejam linearmente independentes para formar a matriz **B** e a solução do sistema $\mathbf{B}\ \mathbf{x_B} = \mathbf{b}$ deve satisfazer $\mathbf{x_B} \geq \mathbf{0}$.

Se fizermos uma busca ao acaso, isto é, um algoritmo exaustivo simples do tipo:

- selecione 10 colunas e resolva o sistema resultante,
- se a solução do sistema for única e não-negativa, então sucesso. Podemos usar esta seleção como uma partição básica factível e iniciar o método simplex.
- senão (**B** não é invertível, ou a solução única tem coordenadas negativas), selecione outras 10 colunas até que sucesso seja obtido, ou todas as possibilidades tenham sido investigadas.

Entretanto, este procedimento simples pode envolver a resolução de $C_{10}^{20} = \dfrac{20!}{10!(20-10)!}$ = 184.756 sistemas de equações lineares 10×10.

Método das duas fases

Notamos que as variáveis de folga foram úteis para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{array}{l} \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_f = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}_f \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Mas, se o problema está na forma de igualdade, não há variáveis de folga. Assim, introduzimos novas variáveis como se fossem de folga:

$$\begin{array}{l} \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Essas novas variáveis são chamadas *variáveis artificiais* e não fazem parte do problema original, portanto, devem ser eliminadas.

Para eliminarmos as variáveis artificiais, utilizamos um *novo objetivo* que resulta no *problema artificial*:

$$\begin{array}{ll} \min\ f_a(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} y_i & \\ s.a. \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} & \\ \qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. & \end{array}$$

A função objetivo do problema artificial penaliza as variáveis artificiais de modo que a solução ótima deste problema deve (se possível) ter $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Caso hajam colunas da matriz identidade na matriz **A**, estas podem ser utilizadas na construção da base inicial sendo complementadas com variáveis artificiais.

Considere o seguinte problema de otimização linear:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \ & f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeito a:} \ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 4 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,2,3 \end{aligned}$$

o qual pode ser escrito na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \ & f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 0x_4 \\ \text{sujeito a:} \ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,4 \end{aligned}$$

Por exemplo, os seguintes problemas podem ser construídos como problemas artificiais:

Caso A: uma variável artificial é introduzida para cada restrição.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \ & f_a(x_1,\dots,x_6) = x_5 + x_6 \\ \text{sujeito a:} \ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,6 \end{aligned}$$

em que x_5 e x_6 são variáveis artificiais. Uma base factível é formada pelas colunas das variáveis artificiais, x_5 e x_6.

Caso B: Apenas uma variável artificial é introduzida – uma coluna da matriz identidade já está disponível.

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \ & f_a(x_1,\dots,x_5) = x_5 \\ \text{sujeito a:} \ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,5 \end{aligned}$$

em que a variável x_5 é a variável artificial. Uma base factível é formada pelas colunas das variáveis x_4 (variável de folga) e x_5 (variável artificial). □

O problema artificial tem sempre uma partição básica factível óbvia:

- **B = I** : variáveis básicas $\mathbf{x_B} = \mathbf{y}$,
- **N = A**: variáveis não-básicas $\mathbf{x_N} = \mathbf{x}$

e, portanto, podemos aplicar o método simplex, que promove as trocas das colunas das variáveis artificiais por colunas das variáveis originais.

Ao final, as variáveis artificiais são não-básicas e uma base com as colunas originais de **A** é obtida.

Uma vez encontrada uma solução básica em que todas as variáveis artificiais são não-básicas, temos uma base formada por colunas originais e, portanto, podemos aplicar o método simplex para resolver o problema original a partir desta base.

Este procedimento é chamado de método das duas fases:

Fase I – resolve o problema artificial

Fase II – resolve o problema original, a partir da base factível obtida na fase I. Se o problema original é infactível, então o problema artificial tem solução ótima com y ≠ 0.

Exemplo Considere o problema de otimização linear definido no exemplo anterior e o problema artificial definido no caso B, em que apenas uma variável artificial é introduzida: Problema artificial:

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && f_a(x_1,\ldots,x_5) = x_5 \\
&\text{sujeito a:} && x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 3 \\
& && 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \quad = 4 \\
& && x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5
\end{aligned}$$

Para resolver o problema artificial, aplicamos o método simplex.

Fase I: Partição básica factível inicial: $B_1 = 4 \quad B_2 = 5 \quad N_1 = 1 \quad N_2 = 2$

$N_3 = 3$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1ª. Iteração

- *Solução básica*:

Resolva o sistema $\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$, cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$ e obtenha a solução: $\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

- *Teste de otimalidade*:

i) *Vetor multiplicador*: Resolva o sistema $\mathbf{B}^T\pi = \mathbf{c}_B$, cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ e obtenha $\pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) *Custos relativos*

$N_1 = 1$: $\hat{c}_1 = c_1 - \pi^T\mathbf{a}_1 = -1 \quad \leftarrow \ x_{N_1} = x_1$ entra na base

$N_2 = 2$: $\hat{c}_2 = c_2 - \pi^T\mathbf{a}_2 = -1$

$N_3 = 3$: $\hat{c}_3 = c_3 - \pi^T\mathbf{a}_3 = -1$

- *Direção simplex*: Resolva o sistema $\mathbf{By} = \mathbf{a}_1$, cuja matriz aumentada

é $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$ e obtenha $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- *Tamanho do passo*

$$\varepsilon = min\left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \quad y_i > 0 \right\} = min\left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{1} \right\} = 2 = \frac{x_{B_1}}{y_1} \quad (x_{B_1} = x_4 \text{ sai da base})$$

- *Atualização*

$$B_1 = 1 \quad B_2 = 5 \quad N_1 = 4 \quad N_2 = 2 \quad N_3 = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>2ª. Iteração</u>: $B_1 = 1 \quad B_2 = 5 \quad N_1 = 4 \quad N_2 = 2 \quad N_3 = 3$

- *Solução básica*: Resolva o sistema $\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$ e obtenha

$\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- *Teste de otimalidade*

i) Vetor multiplicador: Resolva o sistema $\mathbf{B}^T\pi = \mathbf{c}_B$: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ e obtenha

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

ii) *Custos relativos*

$N_1 = 4$: $\hat{c}_4 = c_4 - \pi^T\mathbf{a}_4 = \frac{1}{2}$

$N_2 = 2$: $\hat{c}_2 = c_2 - \pi^T\mathbf{a}_2 = -\frac{3}{2}$ $\leftarrow$ $x_{N_2} = x_2$ entra na base

$N_3 = 3$: $\hat{c}_3 = c_3 - \pi^T\mathbf{a}_3 = \frac{1}{3}$

- *Direção simplex*: resolva o sistema $\mathbf{By} = \mathbf{a}_2$: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$ e obtenha

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- *Tamanho do passo*

$$\varepsilon = min\left\{ \frac{x_{B_i}}{y_i} \;\; y_i > 0 \right\} = min\left\{ \frac{1}{\frac{3}{2}}; \right\} = \frac{2}{3} = \frac{x_{B_2}}{y_2} \quad (x_{B_2} = x_5 \text{ sai da base})$$

- *Atualização*:

$$B_1 = 1 \quad B_2 = 2 \quad N_1 = 4 \quad \underline{N_2 = 5} \quad N_3 = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Base formada por variáveis do problema original. Fim da Fase I.

Fase II: Aplicar o método simplex a partir da base obtida na Fase I. A variável artificial (segunda variável não básica: N_2 = 5) é descartada e os índices não básicos são redefinidos: N_1 = 4, N_2 = 3. □

Resolver:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{sujeito a :} \quad & x_1 + x_2 + \ x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 4 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,2,3 \end{aligned}$$

FASE I:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_a(x_1, \ldots, x_5) = x_5 \\ \text{sujeito a :} \quad & x_1 + x_2 + \ x_3 \qquad + x_5 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad = 4 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,5 \end{aligned}$$

Quadro 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	0	0	0	0	1	
x_5	1	1	1	0	1	3
x_4	2	-1	3	1	0	4

Escrevendo a função objetivo em função das variáveis não básicas.

Quadro 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	-1	-1	-1	0	0	-3
x_5	1	1	1	0	1	3
x_4	2	-1	3	1	0	4

- x_1 entra na base (menor custo relativo)
- x_4 sai da base (variável básica correspondente a linha que fornece a menor divisão 4/2 e 3/1).

Quadro 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	0	-3/2	1/2	1/2	0	-1
x_5	0	3/2	-1/2	-1/2	1	1
x_1	1	-1/2	3/2	1/2	0	2

- x_2 entra na base (menor custo relativo)
- x_5 sai da base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Base	0	0	0	0	~~-1~~	0
x_2	0	1	-1/3	-1/3	~~2/3~~	2/3
x_1	1	0	4/3	1/3	~~-1/3~~	7/3

FASE II

	x_1	x_2	x_3	x_4	
Base	1	-1	2	0	0
x_2	0	1	-1/3	-1/3	2/3
x_1	1	0	4/3	1/3	7/3

Antes de iniciar, escrever a função objetivo em função das variáveis não básicas.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ &\text{sujeito a :} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &\qquad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ &\qquad x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{aligned}$$

FASE II

	x_1	x_2	x_3	x_4	
Base	0	0	1/3	-2/3	-5/3
x_2	0	1	-1/3	-1/3	2/3
x_1	1	0	4/3	1/3	7/3

- x4 entra na base
- x1 sai da base

	x_1	x_2	x_3	x_4	
Base	2	0	3	0	3
x_2	1	1	1	0	3
x_4	3	0	4	1	7

Solução ótima encontrada:

x_1=0, x_2=3, x_3=0, x_4=7, z=-3.