

# Algoritmos e Estruturas de Dados II

## **Grafos – conceitos gerais**

**Thiago A. S. Pardo**

Profa. M. Cristina

Material de aula da Profa.

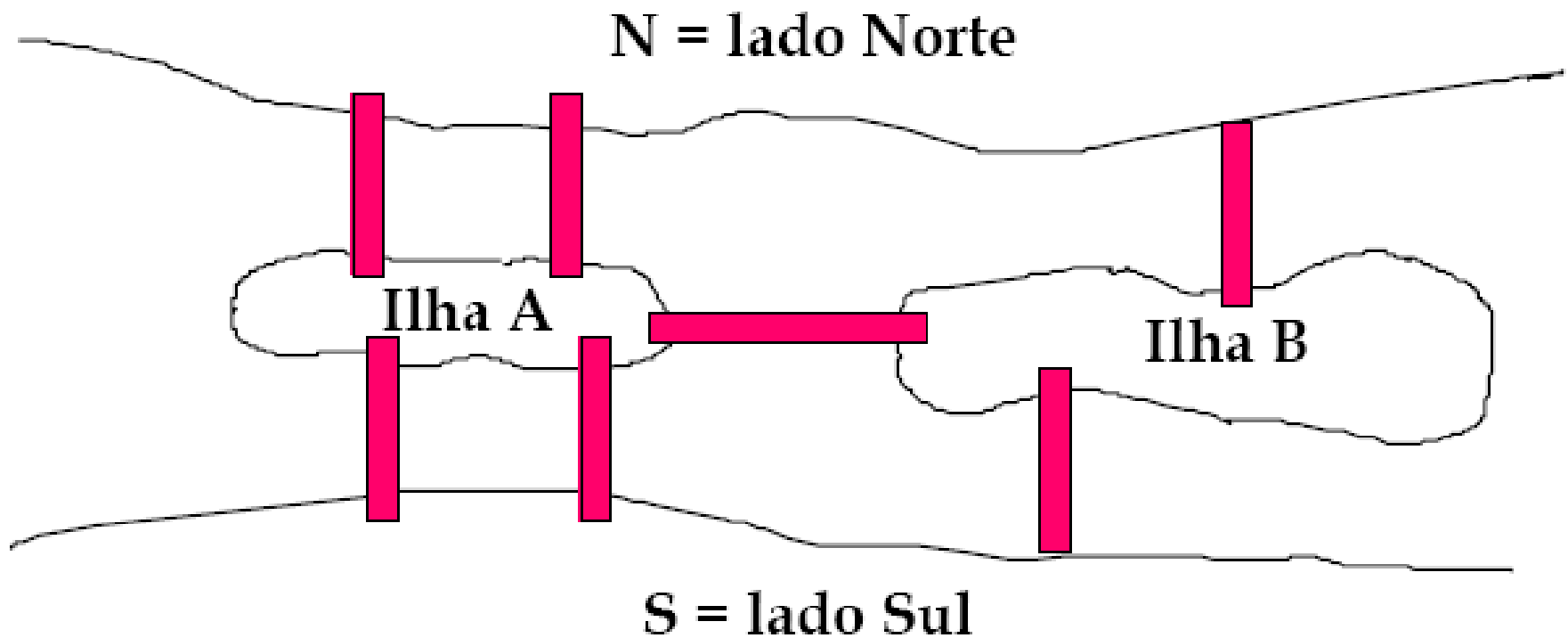
Josiane M. Bueno

# Grafos - Motivação

- **Grafos: conceito introduzido por Euler, em 1736**
  - Problema da Ponte de Königsberg
- **Modelos matemáticos para resolver problemas práticos do dia a dia**
- **Muito usados para modelar problemas em computação -> ênfase em aspectos computacionais**

# Um problema famoso

## As 7 pontes de Königsberg



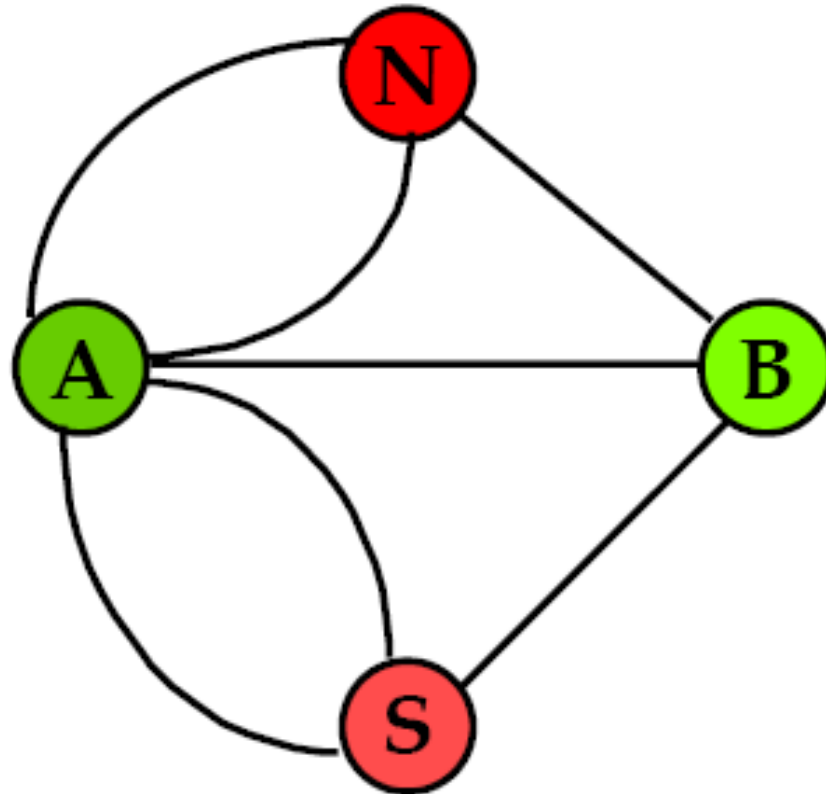
# Grafos - Motivação

- Não é exatamente um problema de Ciência da Computação...
- Mas a Teoria dos Grafos permite que ele seja resolvido automaticamente, usando o computador como ferramenta

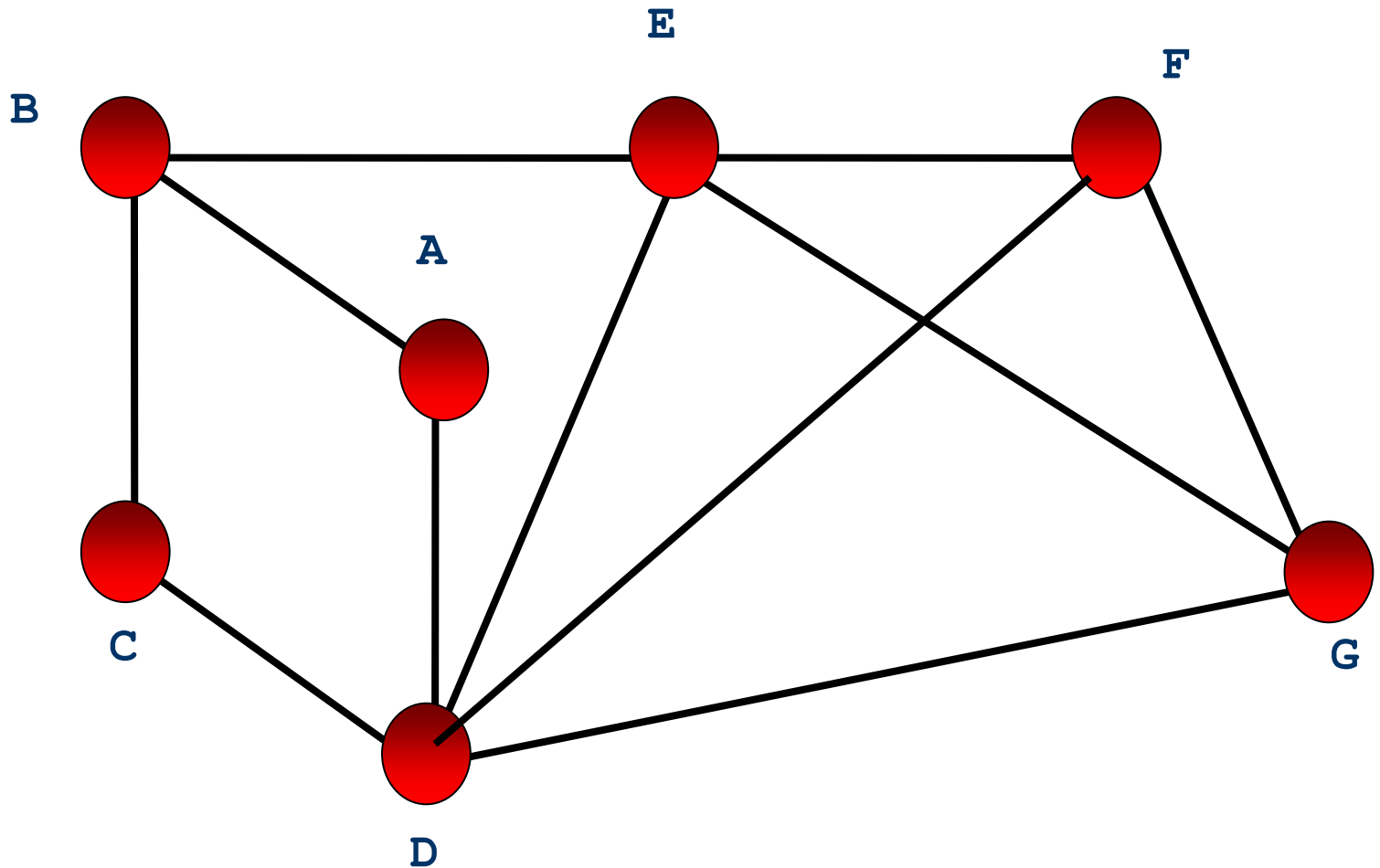
# Exemplos de estruturas que podem ser representadas como grafos

- Circuitos elétricos
- Redes de distribuição
- Relações de parentesco entre pessoas
- Rede de estradas entre cidades
- Outros?

# Exemplo



# Exemplo



# Grafos

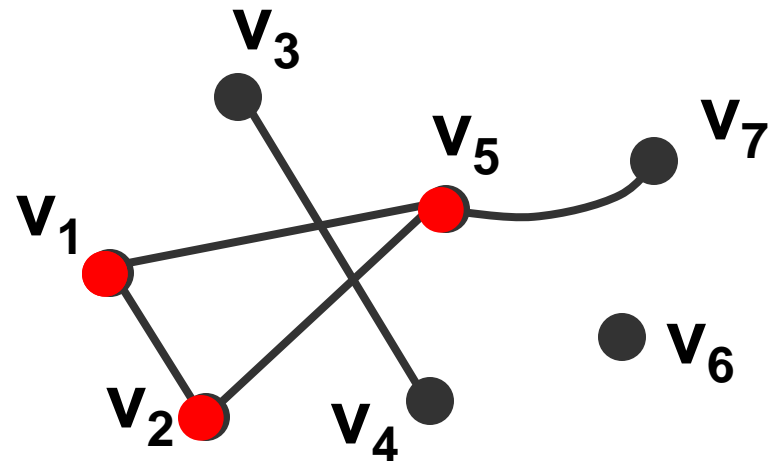
## Definição

- Grafo é modelo matemático que representa relações entre objetos. Um grafo  $G = (V, E)$  consiste de um conjunto de vértices  $V$ , ligados por um conjunto de arestas ou arcos  $E$ .

Representação :

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2); (v_1, v_5); (v_2, v_5); (v_3, v_4); (v_5, v_7)\}$$





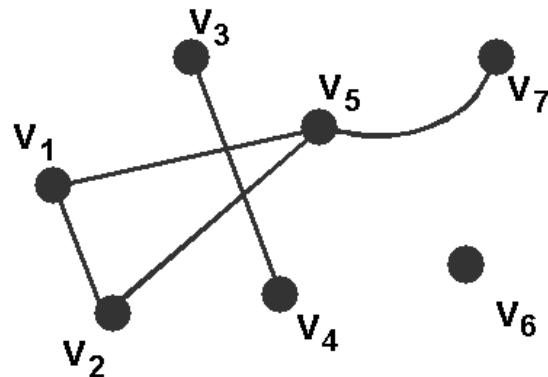
# Grafos

## Definição

- A **ordem** de um grafo  $G$  é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices  $|V(G)|$ , ou seja, pelo número de vértices de  $G$ .
- O **número de arestas** de um grafo é dado por  $|E(G)|$ . Assim, para o grafo do exemplo anterior:

$$|V(G)| = 7$$

$$|E(G)| = 5$$



# Grafos

## Multigrafo

- Quando um grafo possui mais de uma aresta interligando os mesmos dois vértices diz-se que este grafo possui **arestas múltiplas** (ou **arestas paralelas**).
- Um grafo **simples** não possui arestas múltiplas. Caso contrário, trata-se de um **multigrafo** ou **grafo múltiplo**. Por exemplo:



$$V = \{x, y\}$$

$$E = \{(x,y); (y,x)\}$$

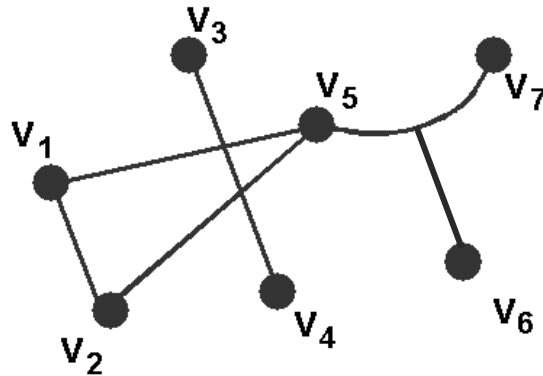
$$|V| = 2 \text{ e } |E| = 2$$



# Grafos

## Hipergrafo

- Um grafo é chamado de **hipergrafo** quando há arestas que conectam mais de 2 vértices



## Grafos

# Grafo Trivial e Grafo Vazio

- Um grafo é dito **trivial** se for de ordem 0 ou 1.  
Por exemplo:

$v_1$  ●

$$V = \{v_1\}$$

$$E = \emptyset$$

$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 0$$

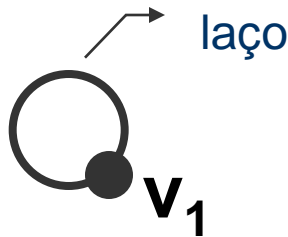
- Um grafo **vazio**  $G=(\emptyset, \emptyset)$  pode ser representado somente por  $G = \emptyset$ .

# Grafos

## Laço

- Se houver uma aresta  $e$  do grafo  $G$  que possui o mesmo vértice como extremos, ou seja,  $e=(x,x)$ , então é dito que este grafo possui um **laço**.

Exemplo:



$$V = \{v_1\}$$
$$E = \{(v_1, v_1)\}$$

$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 1$$



# Grafos

## Vértices Adjacentes

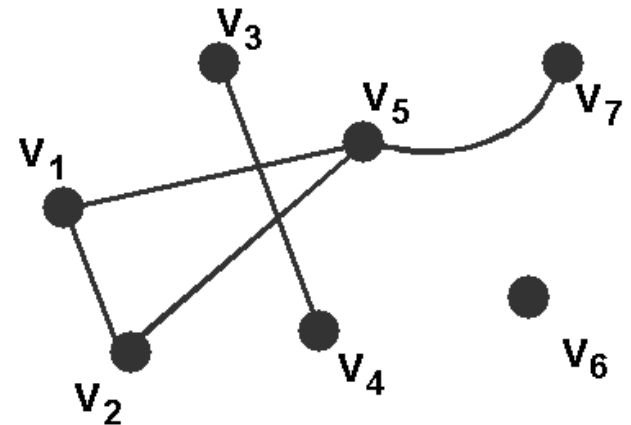
- Diz-se que os vértices  $x$  e  $y$  são **adjacentes** (ou vizinhos) quando estes forem os extremos de uma mesma aresta  $e=(x,y)$ .

Assim:

$v_3$  **é adjacente a**  $v_4$

$v_4$  **é adjacente a**  $v_3$

$v_5$  **NÃO é adjacente a**  $v_4$



# Grafos

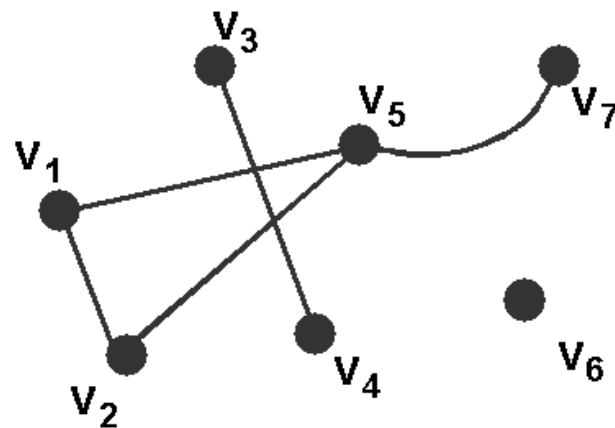
## Arestas Adjacentes

- Diz-se que duas arestas são **adjacentes** (ou vizinhas) quando estas possuírem um mesmo extremo, ou vértice.

Assim:

$(v_1, v_2)$  é adjacente a  $(v_2, v_5)$

$(v_1, v_2)$  **NÃO** é adjacente a  $(v_3, v_4)$



A aresta  $e = (v_3, v_4)$  é dita **incidente** a  $v_3$  e a  $v_4$

# Grafos

## Grafo Completo

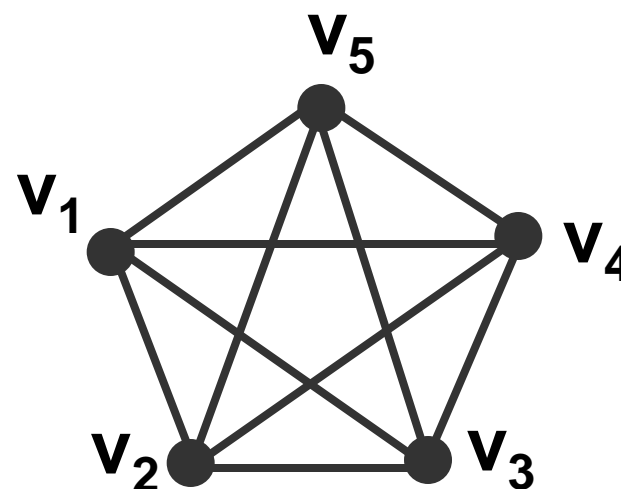
- Um grafo é **completo** se todos os seus vértices forem adjacentes. Um grafo completo  $K_n$  possui  $n(n-1)/2$  arestas.

Exemplo:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), \\ (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), \\ (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$$

$$|V| = 5 \text{ e } |E| = 5(5-1)/2 = 10$$



Grafo  $K_5$

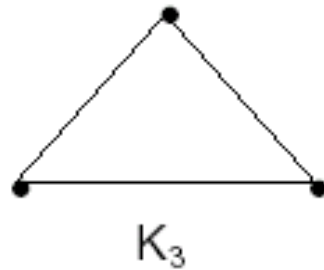


# Grafos

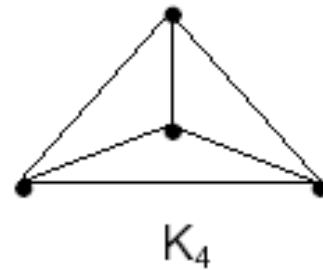
## Grafos Completos



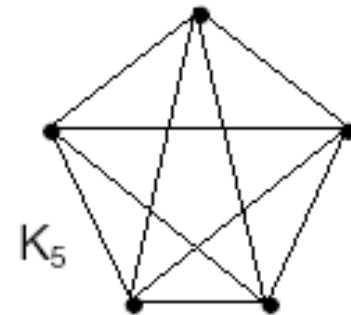
(a)



(b)



(c)



(d)

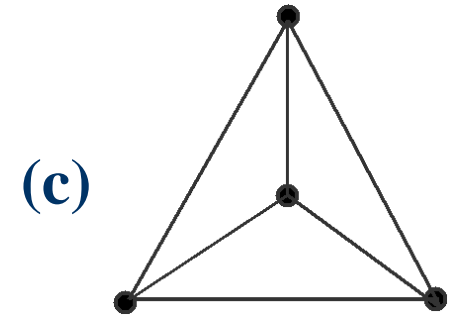
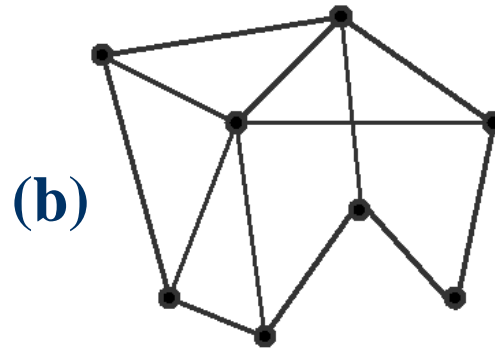
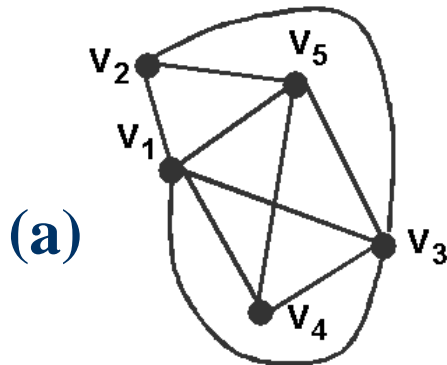
# Grafos

## Grafos Completos

- Um grafo completo  $K_n$  possui  $n(n-1)/2$  arestas
  - Por quê?

# Grafos

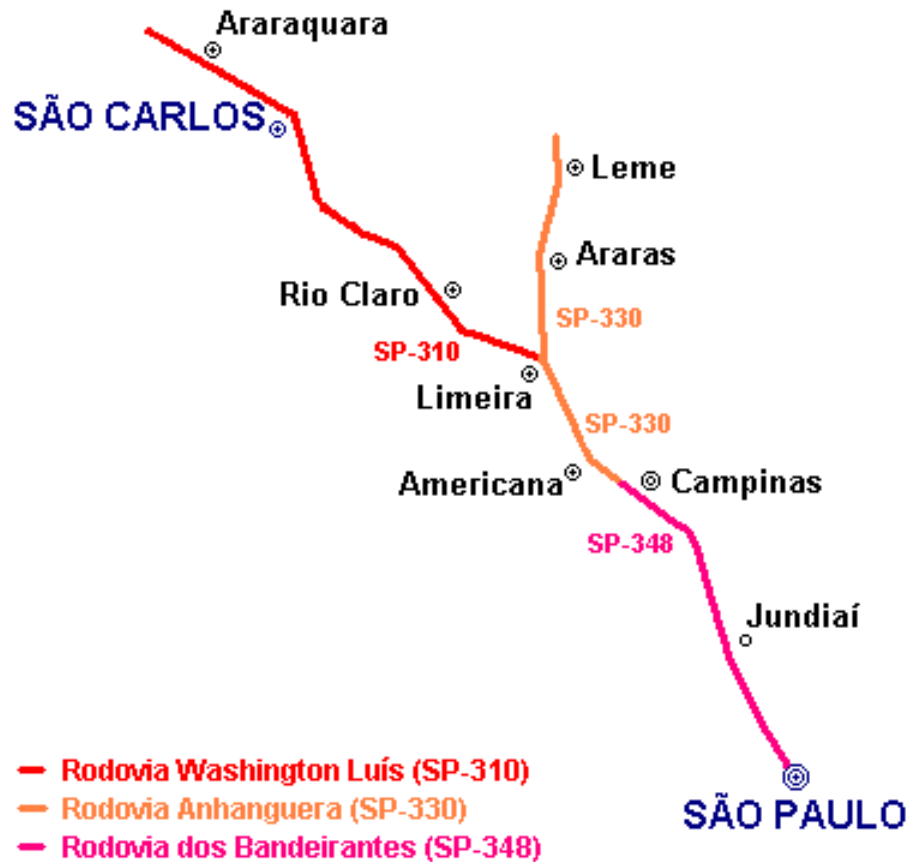
## Exercícios de Fixação



- Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?
- Quais dos grafos acima são completos?
- Quais dos grafos acima são simples?
- No grafo (a), quais vértices são adjacentes a  $v_3$ ? E quais arestas são adjacentes a  $(v_3, v_5)$ ?

# Grafos

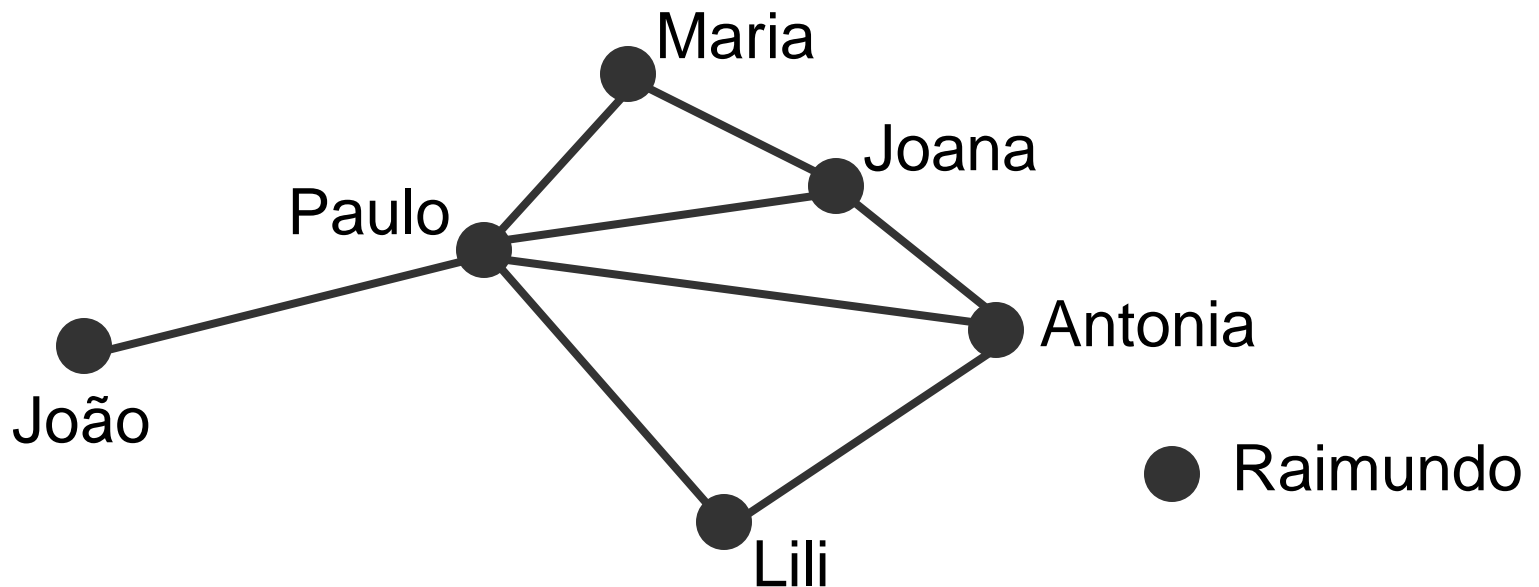
## Aplicações



# Grafos

## Aplicações

Rede de Relacionamentos (**relação** “Conhecer”):

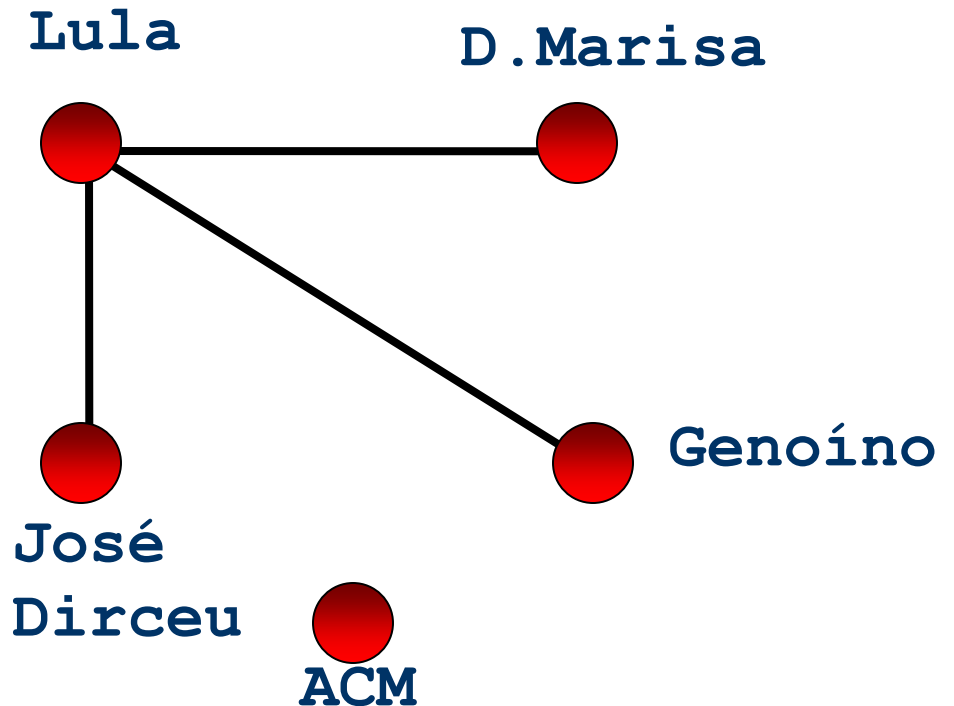


# Grafos

## Aplicações

Rede de  
Relacionamentos  
(**relação** “amizade”):

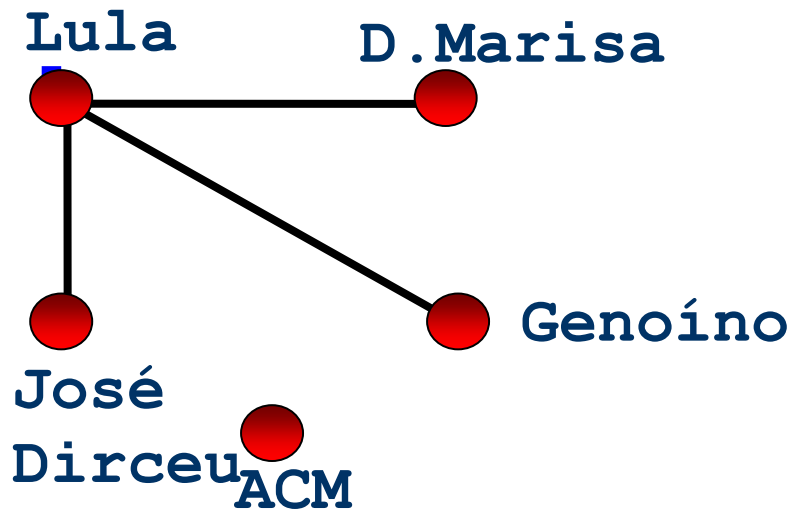
*Quem possui mais amigos?  
E menos amigos?*



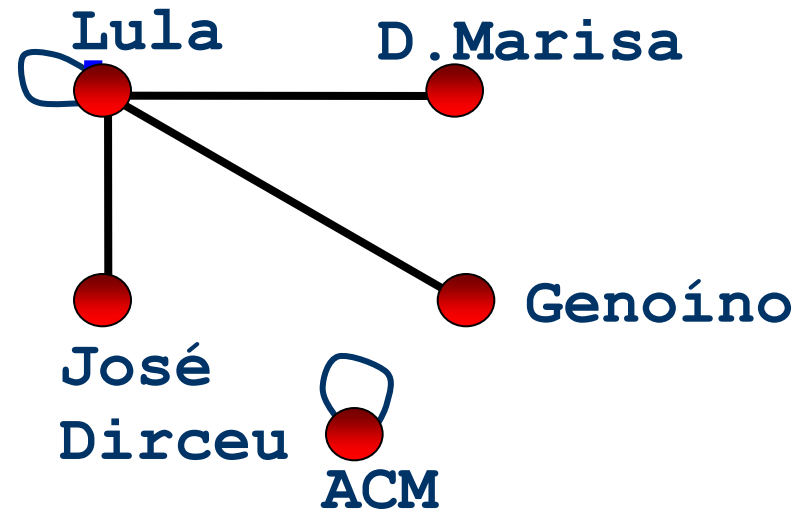
# Grafos

## Aplicações

### Grafo sem laço



### Grafo com laço



# Grafos

## Aplicações

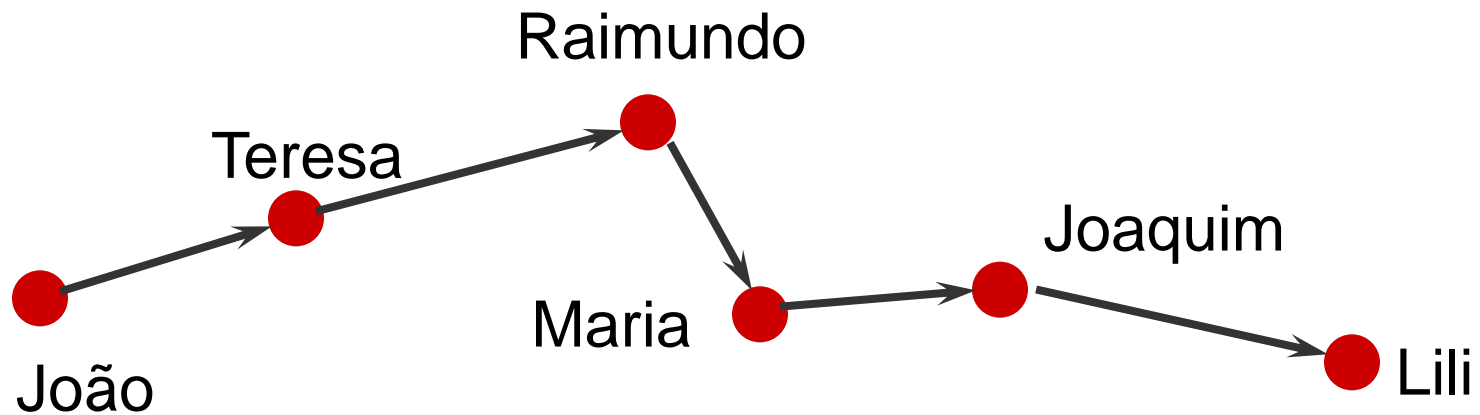
- Cada vértice é uma tarefa de um grande projeto. Há uma aresta de  $x$  a  $y$  se  $x$  é pré-requisito de  $y$ , ou seja, se  $x$  deve estar pronta antes que  $y$  possa começar.
- Cada vértice é uma página na teia WWW. Cada aresta é um link que leva de uma página a outra (Há cerca de 2 milhões de vértices e 5 milhões de arcos).
- Outros: Redes de computadores, rotas de vôos, redes de telefonia etc



# Grafos

## Aplicações

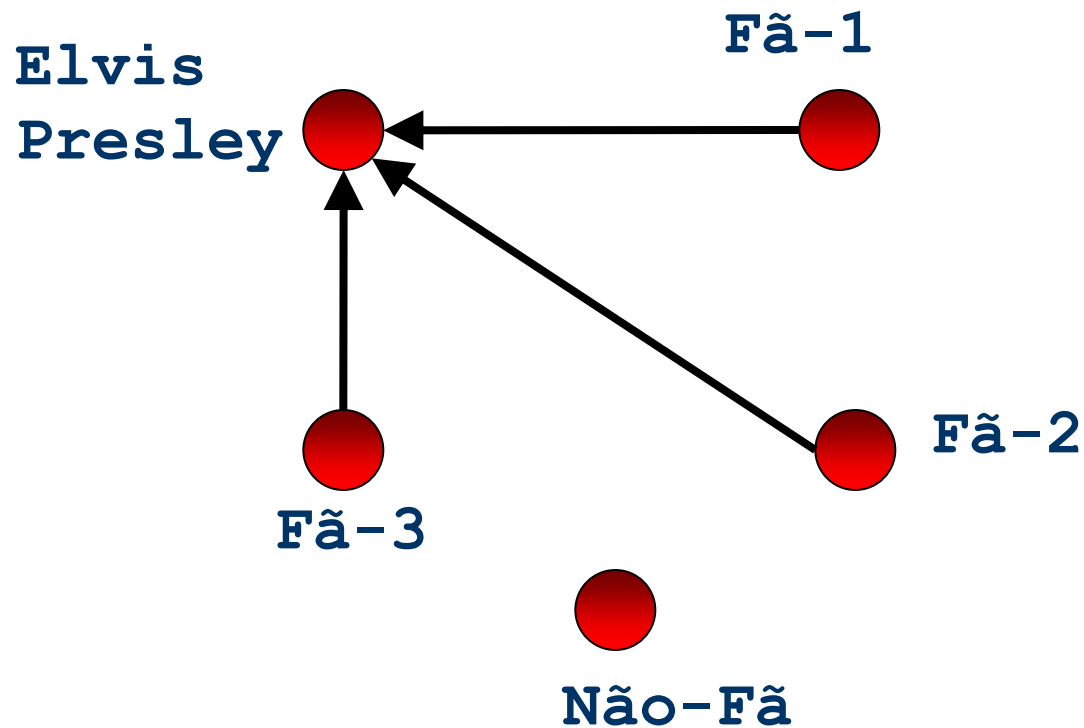
**“João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili que não amava ninguém...” (Carlos Drummond de Andrade)**



# Grafos

## Aplicações

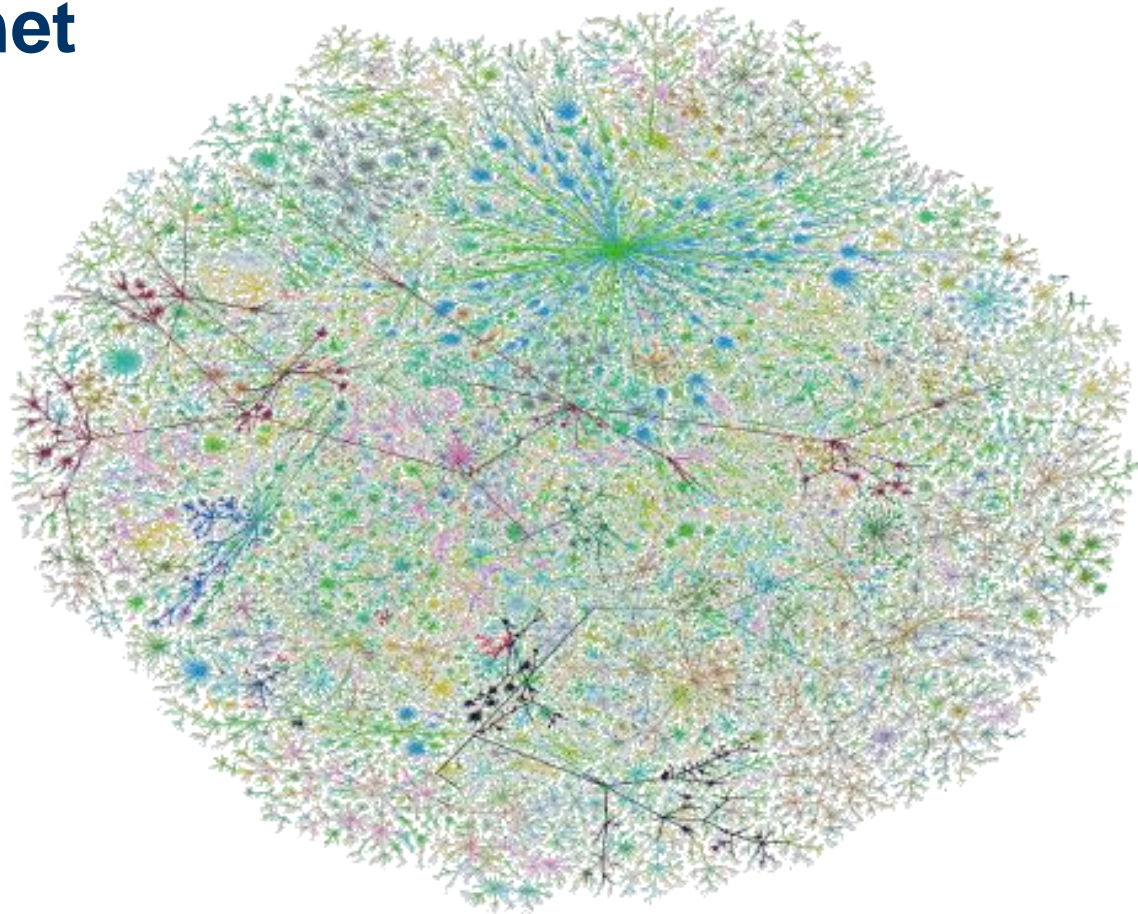
- O Grafo 'sou fã de...'



# Grafos

# Aplicações

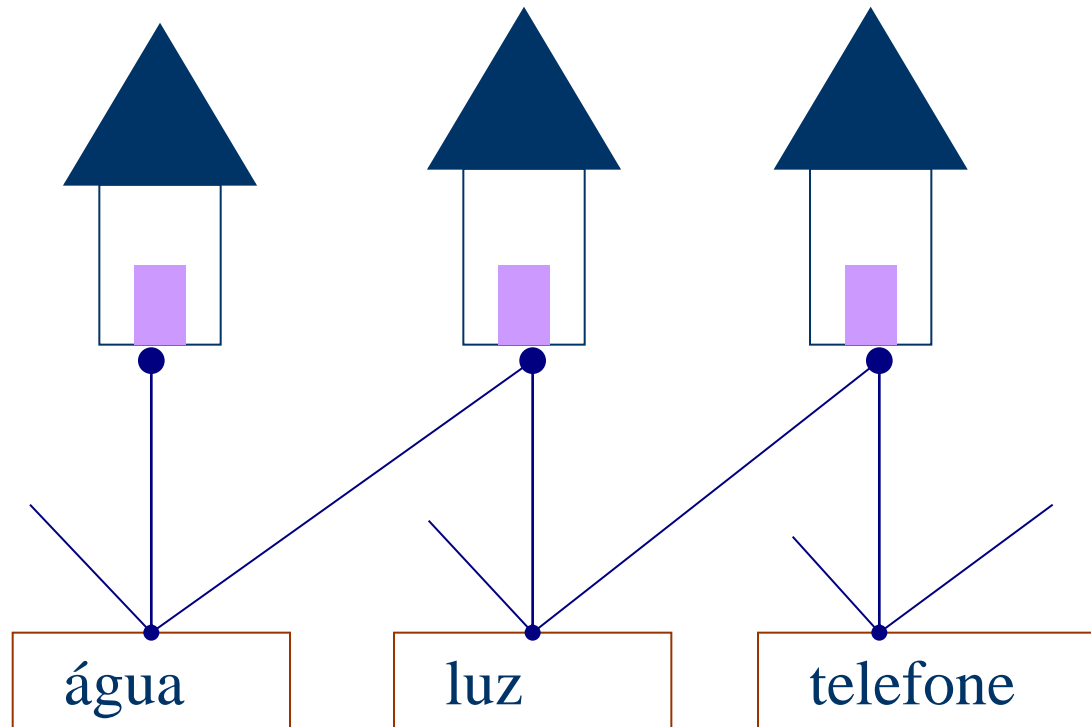
- Internet



# Grafos

## Aplicações

- É possível conectar os 3 serviços às 3 casas sem haver cruzamento de tubulação?



# Grafos

# Aplicações

- Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que estados adjacentes não podem ter a mesma cor?



# Grafos

# Aplicações

- De forma a reduzir seus custos operacionais, uma empresa de transporte de cargas deseja oferecer aos motoristas de sua frota um mecanismo que os auxilie a selecionar o melhor caminho (o de menor distância) entre quaisquer duas cidades por ela servidas, de forma a que sejam minimizados os custos de transporte



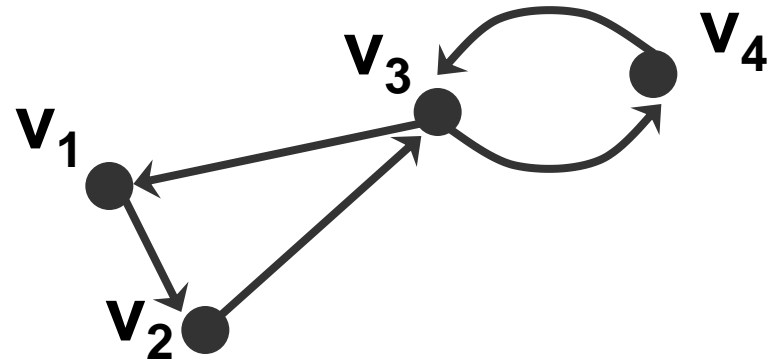
# Grafos



# Grafos Orientados

- Um grafo **orientado** (ou **dígrafo**)  $D = (V, E)$  consiste de um conjunto  $V$  (vértices) e de um conjunto de  $E$  (arestas) de pares ordenados de vértices distintos.

Representação :



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2); (v_3, v_1); (v_2, v_3); (v_3, v_4); (v_4, v_3)\}$$

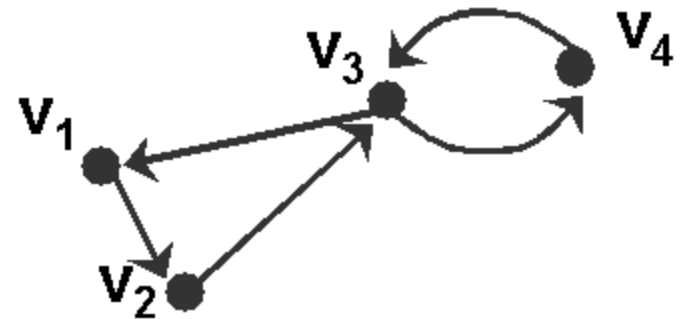


# Grafos Orientados

- Em um grafo orientado, cada aresta  $e = (x, y)$  possui uma única direção de  $x$  para  $y$ . Diz-se que  $(x, y)$  é **divergente** de  $x$  e **convergente** a  $y$ . Assim:

$(v_3, v_1)$  é **divergente** de  $v_3$

$(v_3, v_1)$  é **convergente** a  $v_1$

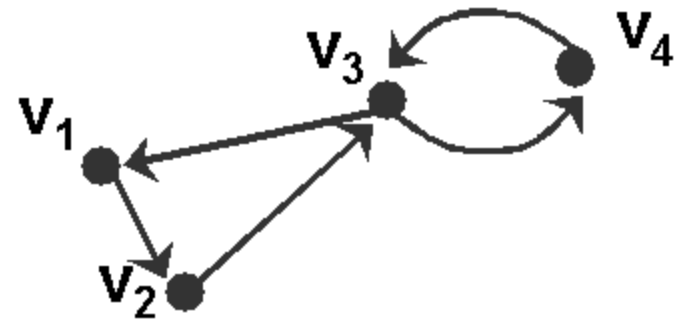


# Grafos Orientados

- Em grafos orientados, em  $(x,y)$  tem-se que  $y$  é adjacente a  $x$ , mas não oposto.
- Se o grafo é orientado ou não,  $x$  e  $y$  são “vizinhos”

$(v_3, v_1)$   $v_1$  é adjacente a  $v_3$

$(v_3, v_1)$   $v_1$  e  $v_3$  são vizinhos



# Grafos

## Grau

- O **Grau**  $d(v)$  de um vértice  $v$  corresponde ao número de vértices adjacentes a  $v$  (ou ao número de arestas incidentes a  $v$ ).

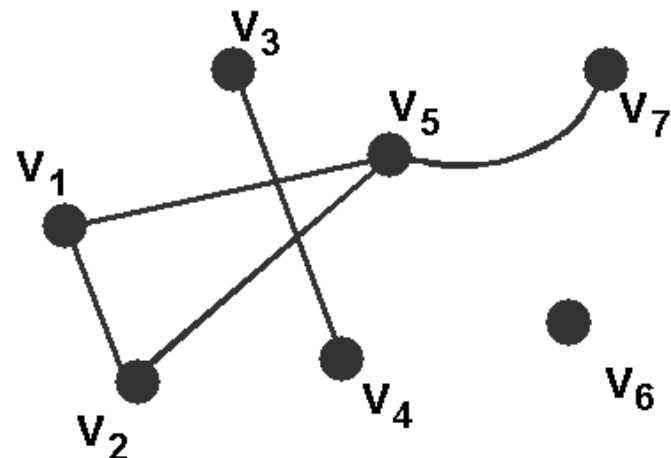
Exemplo:

$$d(v_6) = 0$$

$$d(v_3) = d(v_4) = d(v_7) = 1$$

$$d(v_1) = d(v_2) = 2$$

$$d(v_5) = 3$$



# Grafos

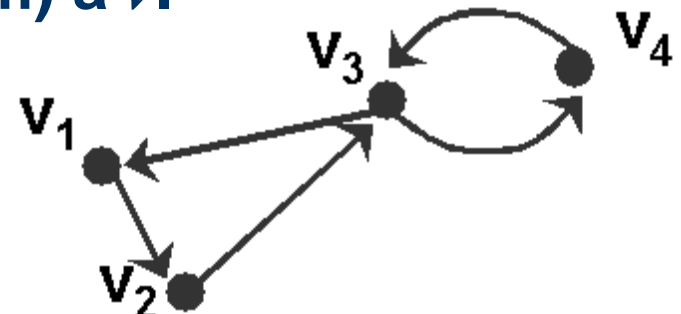
## Grau

- Em um grafo orientado:
  - O **Grau de Saída**  $d_{out}(v)$  de um vértice  $v$  corresponde ao número de arestas divergentes (que saem) de  $v$ .
  - O **Grau de Entrada**  $d_{in}(v)$  de um vértice  $v$  corresponde ao número de arestas convergentes (que chegam) a  $v$ .

$$d_{in}(v_3) = 2 \text{ e } d_{out}(v_3) = 2$$

$$d_{in}(v_1) = d_{in}(v_2) = d_{in}(v_4) = 1$$

$$d_{out}(v_1) = d_{out}(v_2) = d_{out}(v_4) = 1$$



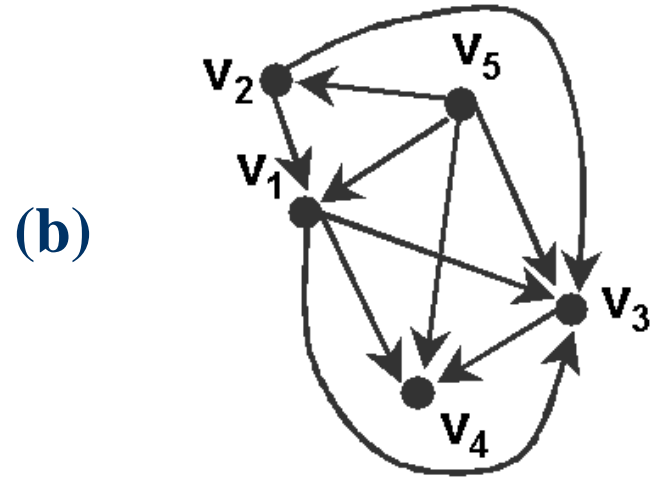
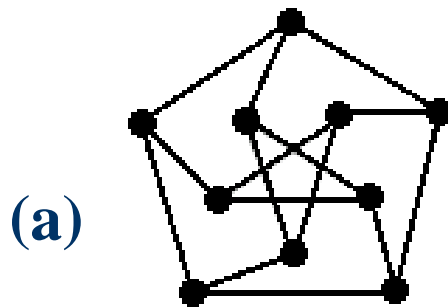
# Grafos

## Grau

- Um vértice com grau de saída nulo, ou seja,  $d_{out}(v) = 0$ , é chamado de **sumidouro** (ou **sorvedouro**)
- Um vértice com grau de entrada nulo, ou seja,  $d_{in}(v) = 0$ , é chamado de **fonte**
- Diz-se que um grafo é **regular** se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau

# Grafos

## Exercício de Fixação



- O grafo (a) é regular? Por quê?
- Existe alguma fonte ou sumidouro no grafo (b)?