6a. Lista de Exercícios de Álgebra Linear — Aulas 31.08 e 11.09.2012

Bases, dimensão e Coordenadas

1. Verifique, em cada um dos ítens abaixo, se o subconjunto B do espaço vetorial V é uma base de V.

   1. $V = P_3(\mathbb{R})$, $B = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$.
   2. $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.
   3. $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$.

2. Encontrar em cada um dos ítens abaixo uma base e a dimensão do subespaço W do espaço vetorial V.

   1. $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x - y = 0 \ \text{ e } \ x + 2y + t = 0\}$.
   2. $W = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}); AX = X\}$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   3. $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}); p''(t) = 0, \ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

3. Dados U, W subespaços do espaço vetorial V determine:

   1. uma base e a dimensão de U.
   2. uma base e a dimensão de W.
   3. uma base e a dimensão de $U \cap W$.
   4. uma base e a dimensão de $U + W$.

   nos seguintes casos:

   1. $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.
   2. $U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R});\ \text{traço}(A) = 0\}$ e $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}); A^t = -A\}$, $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

      (traço$(A) = a_{11} + a_{22}$ é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz.)

4. Determinar as coordenadas do vetor $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ em relação as bases:

   1. base canônica.
   2. $\{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$

5. Determinar as coordenadas do vetor $p \in P_3(\mathbb{R})$, dado por $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3, t \in \mathbb{R}$, em relação as bases:

   1. base canônica.
   2. $\{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$.

6. Verifique que as coordenadas de $p \in P_n(\mathbb{R})$ com relação a base $B = \{1, x, \cdots, x^n\}$ é

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{1}{2!}p''(0) \\ \vdots \\ \frac{1}{n!}p^{(n)}(0) \end{pmatrix}$$

onde $p^{(k)}(0)$ representa a k-ésima derivada de p em $x = 0$. *(Você encontra alguma analogia com o polinômio de Taylor?)*