ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – $2^{\underline{o}}/2017$

$2^{\underline{a}}$ lista de exercícios

Em todos os exercícios tomamos $n \to \infty$.

1. Prove os seguintes resultados:
(a) $n^2 + 2 = O(n^2 - 3)$,
(b) $n^2 + 2 = o(n^3)$,
(c) $(-1)^n\, n^2 = O(n^2)$,
(d) $(-1)^n\, n^2 = o(n^3)$,
(e) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O(\sqrt{n})$ e
(f) $\sin(n) = O(1)$.

2. Suponha que $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais. Prove que
(a) $O(O(a_n)) = O(a_n)$,
(b) $O(o(a_n)) = o(O(a_n)) = o(o(a_n)) = o(a_n)$,
(c) $O(a_n) \mp O(a_n) = O(a_n)$,
(d) $o(a_n) \mp o(a_n) = o(a_n)$,
(e) $-O(a_n) = O(a_n)$,
(f) se $c \neq 0$, então $O(c\, a_n) = O(a_n)$ e $o(c\, a_n) = o(a_n)$,
(g) $\{O(a_n)\}^2 = O(a_n^2)$,
(h) $O(O(a_n)) + O(a_n) = O(a_n)$ e
(i) $1 - (1 - 1/n)(1 - 2/n) = O(n^{-1}) = o(n^{-1/2}) = o(1)$.

3. Apresente um exemplo com sequências de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ tais que $a_n = O(b_n)$, mas $b_n \neq O(a_n)$.

4. Suponha que $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ são sequências de números reais. Prove que
(a) $O(a_n)O(b_n) = O(a_n b_n)$,
(b) $O(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n)$ e
(c) $o(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n)$.

5. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prove que
(a) $O_p(O_p(X_n)) = O_p(X_n)$,
(b) $O_p(o_p(X_n)) = o_p(X_n)$,
(c) $o_p(O_p(X_n)) = o_p(X_n)$ e
(d) $o_p(o_p(X_n)) = o_p(X_n)$.

6. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais tais que $\mathrm{E}(X_n^2) = O(a_n^2)$. Prove que $X_n = O_p(a_n)$
Este resultado é verdadeiro se $\mathrm{E}(|X_n|) = O(a_n)$?

7. Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais tais que $\mathrm{E}(X_n) = O(a_n)$ e $\mathrm{Var}(X_n) = O(a_n^2)$, prove que $X_n = O_p(a_n)$

8. Suponha que $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = c$, $c \in \mathbb{R}$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$. Prove que $X_n - c = o_p(1)$.

9. Suponha que $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias $\overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Seja $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Prove que $Y_n = O_p(n^{-1}) = o_p(n^{\alpha})$ para todo $\alpha > -1$.

10. Suponha que $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ e $(Z_n)_{n\geq 1}$ são sequências de variáveis aleatórias definidas no espaço $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tais que $P(Z_n = 0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, e $X_n = O_p(Y_n)$. Prove que $X_n Z_n = O_p(Y_n Z_n)$.