ICMC – USP

SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1

8ª lista de exercícios

1. X é uma variável aleatória com distribuição $\mathsf{uniforme}([-\theta, \theta])$, $\theta > 0$. Deve ser testada $\mathrm{H}_0 : \theta = 1$ contra $\mathrm{H}_1 : \theta > 1$. Com base em uma observação de X, rejeita-se H_0 se, e somente se, $|X| > 0,99$. (a) Determine a probabilidade do erro tipo I deste teste.
   (b) Represente graficamente a função poder do teste.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}([0, \theta])$, $\theta > 0$. Seja $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Devemos testar $\mathrm{H}_0 : \theta \leq \theta_0$ *versus* $\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$. Propomos o teste "rejeitar H_0 se, e somente se, $X_{(n)} \geq c$".
   (a) Obtenha a função poder deste teste e prove que ela é crescente monótona em θ.
   (b) Se $\theta_0 = 1/2$ e o tamanho do teste é $0,05$, qual o valor de c?
   (c) Qual deve ser o tamanho da amostra para que o teste das hipóteses no item acima tenha poder igual a $0,98$ quando $\theta = 3/4$?
   (d) Se em uma amostra de 20 observações tivermos $x_{(n)} = 0,48$, quanto vale a probabilidade de significância?

3. X é uma variável aleatória com valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ com probabilidades $\theta(1-\theta)$, $\theta^2(1-\theta)$, $\theta(1-\theta)^2$ e $1 - 2\theta(1-\theta)$, respectivamente, $0 < \theta < 1$. Apresente o teste MP para $\mathrm{H}_0 : \theta = 1/4$ *versus* $\mathrm{H}_1 : \theta = 3/4$ com nível de significância $15/64$ e calcule o poder deste teste.

4. (a) Uma moeda é lançada n vezes com o obejtivo de verificar se a face "cara" é favorecida. Apresente um teste UMP para esta situação.
   (b) Se $n = 25$ e 17 resultados "cara" foram observados, qual seria a sua decisão a um nível de significância de 10%?

5. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Apresente um teste para as hipóteses dos itens abaixo. Qual(is) dos testes é (são) uniformemente mais poderoso(s) (UMP)?
   (a) $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ *versus* $\mathrm{H}_1 : \lambda = \lambda_1$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$.
   (b) $\mathrm{H}_0 : \lambda = \lambda_0$ *versus* $\mathrm{H}_1 : \lambda \neq \lambda_0$.
   (c) $\mathrm{H}_0 : \lambda \leq \lambda_0$ *versus* $\mathrm{H}_1 : \lambda > \lambda_0$.

6. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma distribuição $\mathsf{normal}(\mu_0, \sigma^2)$, μ_0 conhecido. As hipóteses $\mathrm{H}_0 : \sigma \leq \sigma_0$ e $\mathrm{H}_1 : \sigma > \sigma_0$ devem ser testadas.
   (a) Apresente o teste UMP de tamanho α, $0 < \alpha < 1$.
   (b) Represente graficamente a função poder do teste UMP.
   (c) Calcule o poder do teste quando $n = 5$, $\alpha = 0,05$ e $\sigma/\sigma_0 = 1,5$.

7. Sejam $X_1, \ldots, X_{n_1} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu_1, \sigma^2)$ e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu_2, \sigma^2)$, independentes. Apresente um teste para as hipóteses $\mathrm{H}_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ e $\mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$ com tamanho α, $0 < \alpha < 1$.