PRINCIPAIS MODELOS CONTÍNUOS

2011

1. Modelo uniforme

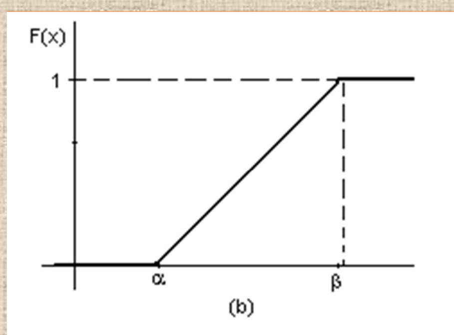
Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros α e β ($\alpha < \beta$) se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(\alpha, \beta)$.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{se} \quad \alpha \le x \le \beta, \\ 1, & \text{se} \quad x > \beta. \end{cases}$$



Propriedades:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}.$$

Exemplo

A dureza de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória uniforme no intervalo (50,70) unidades. Qual a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60?

Solução. X representa a dureza de uma peça de aço, sendo que X ~ U(50, 70) e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 50 \le x \le 70, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

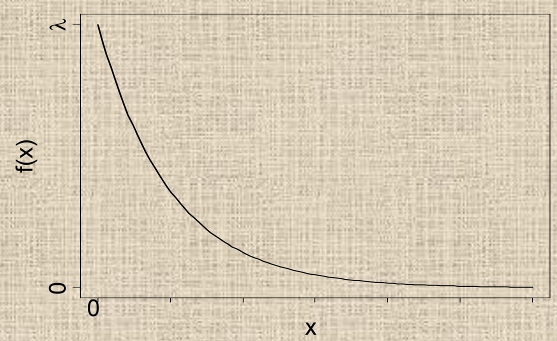
Portanto,

$$P(55 < X < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dx = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

2. Modelo exponencial

Uma v.a. contínua X tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de densidade é dada por

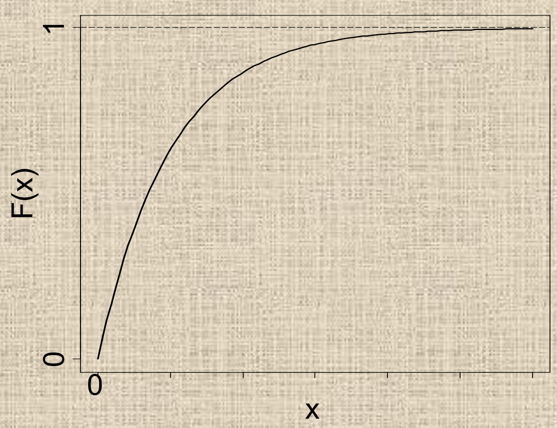
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Notação: X ~ Ex(λ).

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Propriedades:

$E(X) = 1/\lambda$ e $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

2. Modelo exponencial

Propriedade. Se X ~ Ex(λ), então P(X > a + b| X > b) = P(X > a).

É a única distribuição contínua com esta propriedade ("falta de memória").

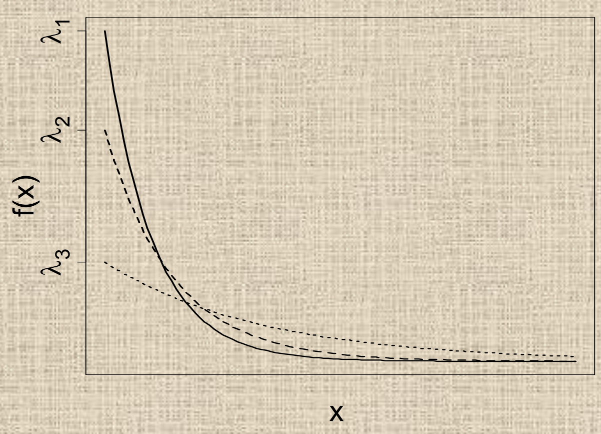
Observação. Também encontramos X ~ Ex(α), em que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Relação: $\alpha = 1 / \lambda$.

α: escala e λ: taxa.

Exemplo gráfico.
Diferentes valores de λ.



Exemplo

O tempo de vida de um tipo de fusível segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada fusível tem um custo de \$10,0 e se durar menos de 200 horas há um custo adicional de \$8,0.

(a) Qual é a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas?
(b) Determinar o custo esperado.

Solução. Se X é o tempo de vida de um fusível, temos E(X) = 100 horas, λ = 1 / E(X) = 0,01 e X ~ Ex(0,01). Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$(a)\ \ P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - (1 - e^{-\frac{150}{100}}) = e^{-1,5} = 0,223.$$

Exemplo

(b) O custo C é uma v.a. discreta dada por

$$C(X) = \begin{cases} 10, & \text{se } X \geq 200, \\ 10 + 8, & \text{se } X < 200. \end{cases}$$

O custo esperado (custo médio) é E(C) = 10 × P(C = 10) + 18 × P(C = 18). Usando a variável X calculamos

$$P(C=10) = P(X \geq 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - F(200) = e^{-2},$$

$$P(C=18) = P(X \leq 200) = F(200) = 1 - e^{-2} \text{ e}$$

$$E(C) = 10 \times e^{-2} + 18 \times (1 - e^{-2}) = \$16,9.$$

3. Modelo de Weibull

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição de Weibull com parâmetros de escala $\alpha > 0$ e forma $\beta > 0$ se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x \geq 0.$$

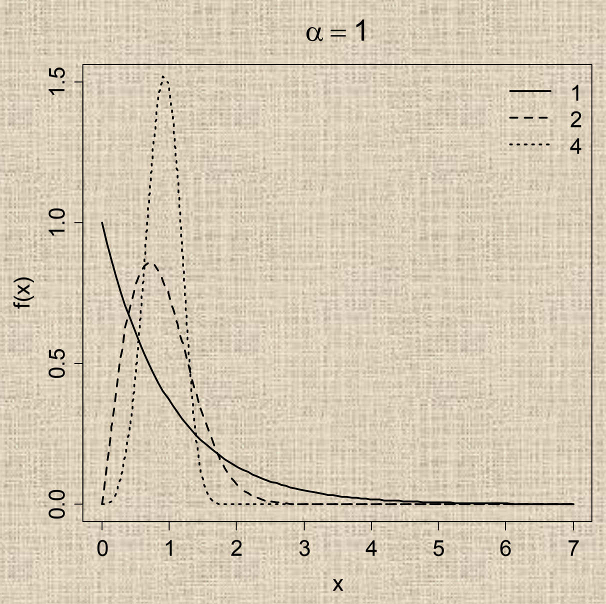
Função distribuição acumulada:

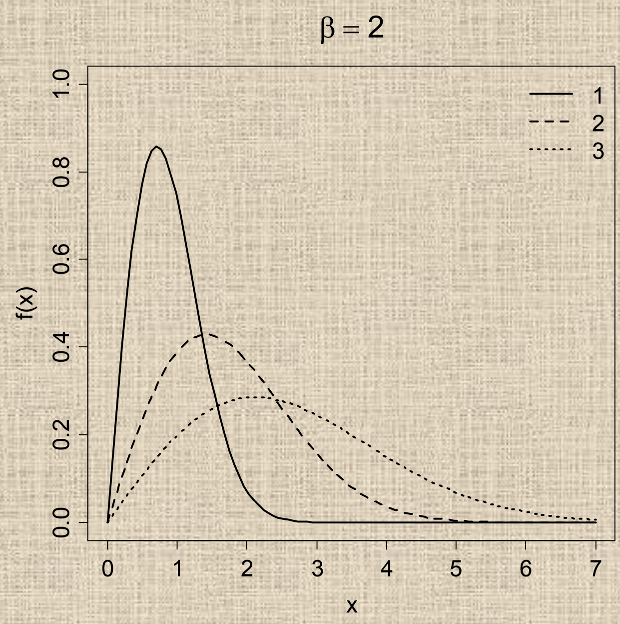
$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x \geq 0.$$

Notação: $X \sim W(\alpha, \beta)$.

Obs. Se $\beta = 1$, $X \sim Ex(\alpha)$ (slide 5).

Exemplos gráficos





Aplicações

Modelo de Taxa de falhas: em caso de um sistema composto (em série ou em paralelo) em que a falha é devida ao problema "mais grave".

Confiabilidade de sitemas: avaliar confiabilidade dos sistemas mesmo sem conhecer a confiabilidade de cada componente.

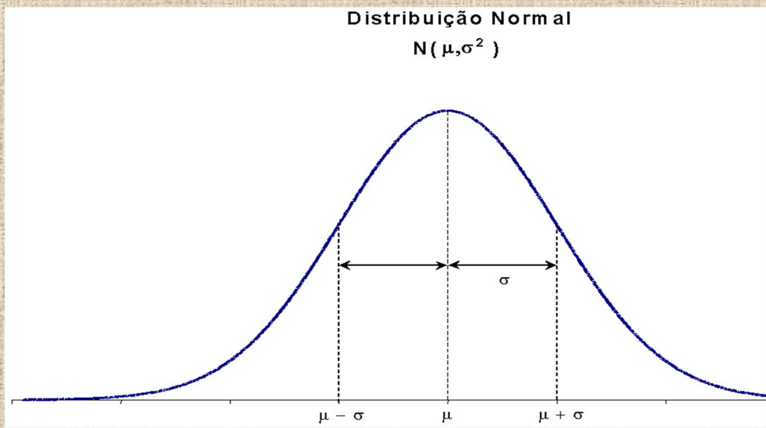
Função de confiabilidade: $R(t) = \exp(-[t/\alpha]^{\beta})$.

4. Modelo normal (ou gaussiano)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se sua função densidade é dada por

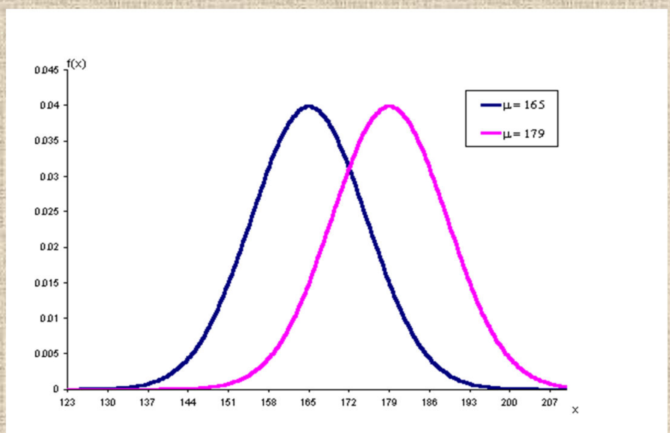
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; x \in R.$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

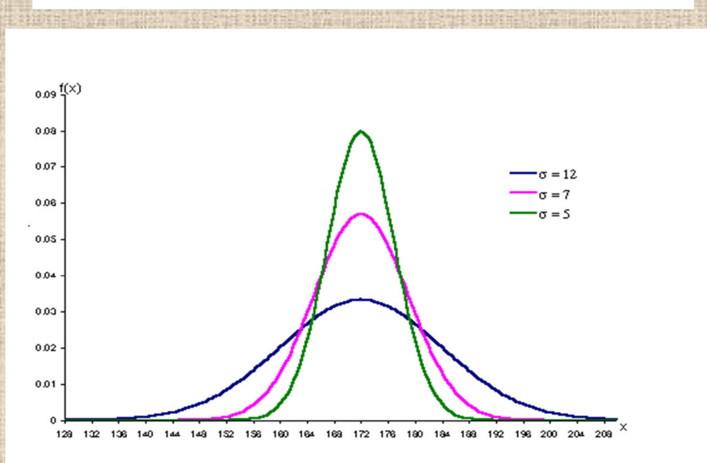


Exemplos

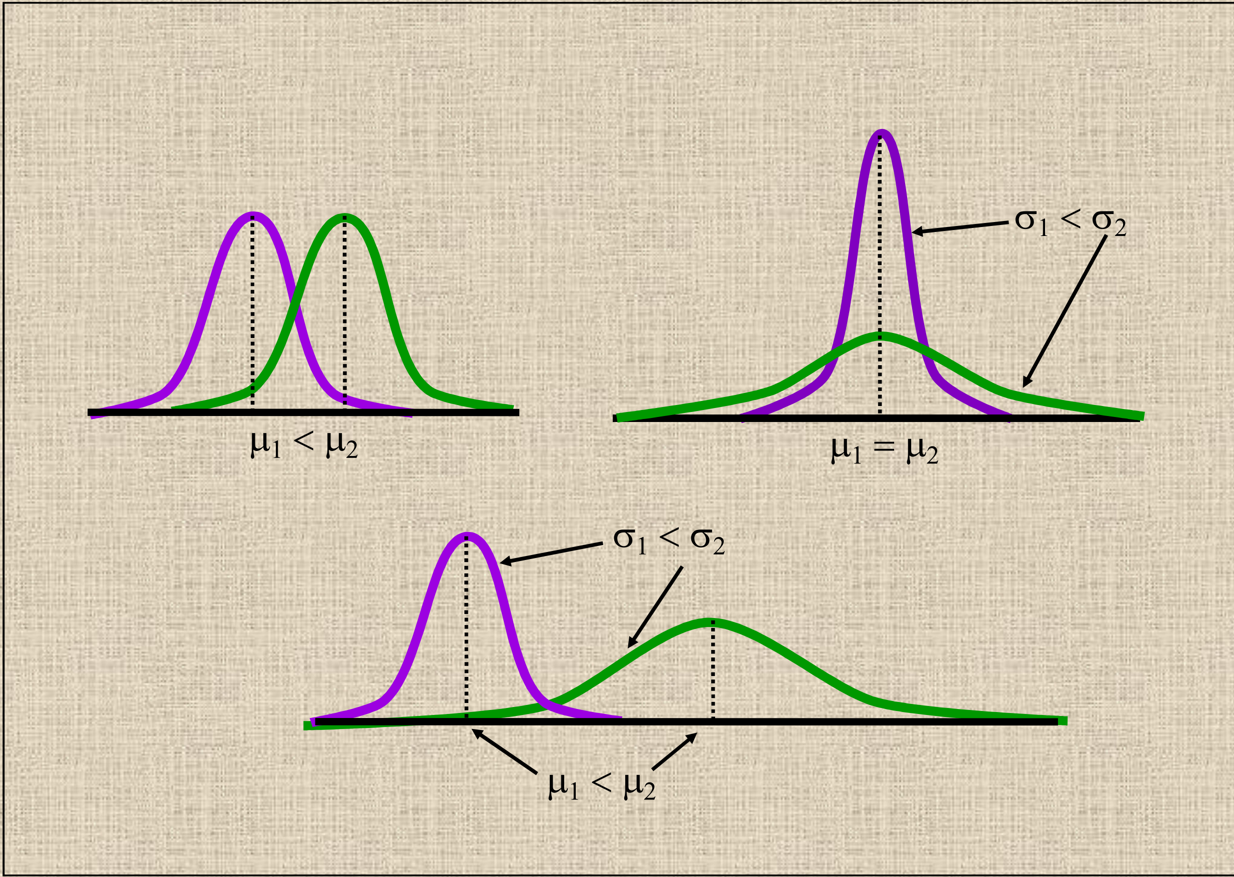
Distribuições normais com médias diferentes e variâncias iguais.



Distribuições normais com médias iguais e variâncias diferentes.



Exemplos



Propriedades

(a) $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$.

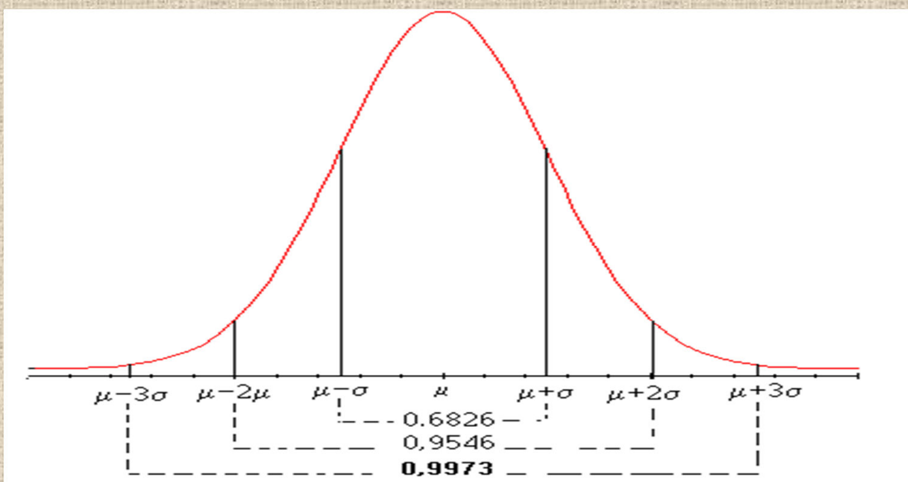
(b) mediana = moda = μ : a distribuição é simétrica em relação à média.

(c) Como a área total sob curva é igual a 1, à esquerda e à direita de μ a área é igual a 0,5.

(d) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6896$,

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9546$ e

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,9973$.



Propriedades

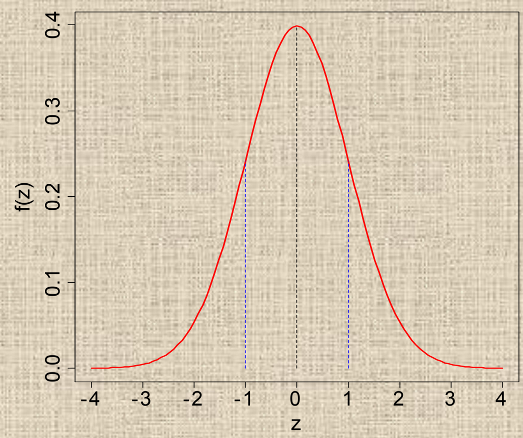
A função de distribuição acumulada de uma v.a. X ~ N(μ, σ²) é

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt.$$

Integral sem solução analítica. Cálculo de probabilidades com o auxílio de tabelas.

Normal padrão ou reduzida. Se Z é uma v.a. normal com média 0 e variância 1, então Z é chamada de uma v.a. normal padrão ou reduzida e sua função densidade é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \ z \in R.$$



A função de distribuição acumulada de uma v.a. Z ~ N(0,1) é

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt.$$

Uso da tabela normal

Tabela. Areas sob a curva normal padrão ou reduzida para z ≥ 0.

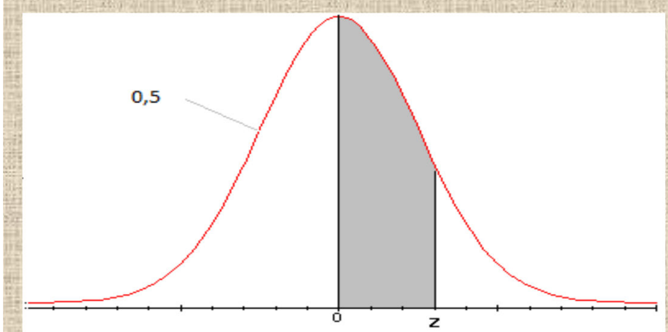
Z ~ N(0,1): distribuição normal padrão.

Valores no corpo da tabela: P(0 ≤ Z ≤ z), z com duas decimais.

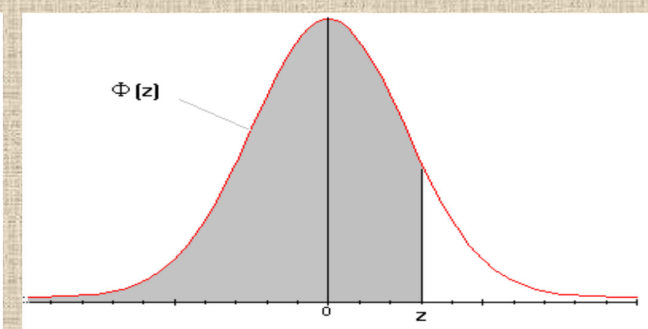
Para obter as probabilidades acumuladas:

Φ(z) = P(Z ≤ z) = 0,5 + P(0 ≤ Z ≤ z) (valor da tabela);

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, \quad -4{,}59 \le z \le 4{,}59.$$



Áreas na tabela.



Áreas de interesse.

Uso da tabela normal

1ª coluna: parte inteira de z e 1ª decimal.

A partir da 2ª coluna a 2ª decimal de z:

na 2ª coluna a 2ª decimal de z é "0";

na 3ª coluna a 2ª decimal de z é "1"; etc.

Exemplo. P(Z ≤ -1,25)? Na tabela encontramos P(0 ≤ Z ≤ 1,25) na interseção da linha correspondente a 1,2 com a coluna 0,05:

2ª decimal

Parte inteira e 1ª decimal

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0										
...										
1,2						0,39435				
...										
4,5										

Resposta. P(Z ≤ -1,25) = 0,5 - 0,39435 = 0,10565.

Exemplo

Se Z ~ N(0,1), calcule
(a) P(Z < 1,80),
(b) P(0,80 < Z < 1,40),
(c) P(Z > -0,57) e
(d) o valor de k tal que
P(Z < k) = 0,05.

No Excel:

(a) DIST.NORMP(1,8).

(b) DIST.NORMP(1,4) – DIST.NORMP(0,8).

(c) 1-DIST.NORMP(-0,57).

(d) INV.NORMP(0,05).

Solução. Da tabela normal padrão tem-se

$$(a)\, P(Z<1{,}80)=\Phi(1{,}80)=0{,}5+0{,}46407=0{,}96407,$$

$$\text{(b) } \mathrm{P}(0{,}80<Z<1{,}40)=\Phi(1{,}40)-\Phi(0{,}80)=0{,}41924-0{,}28814=0{,}1311,$$

$$(c)\, P(Z>-0{,}57)=0{,}5+P(0\le Z\le 0{,}57)=0{,}5+0{,}21566=0{,}71566,$$

$$(d)\ P(Z<k)=0{,}05 \Rightarrow P(0<Z<z)=0{,}45 \Rightarrow z=1{,}64 \Rightarrow$$

$$k=-1{,}64.$$

Observação. Para todo k > 0,

$$(i)\, \mathrm{P}(Z \le -k) = 0{,}5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le k) \quad \text{e}$$

$$(ii)\, \mathrm{P}(-k \le Z \le k) = 2\mathrm{P}(0 \le Z \le k).$$

Transformação linear de uma variável normal

Se X ~ N(μ, σ^2), então Y = a + bX ~ N(μ_Y, σ_Y^2), sendo que μ_Y = a + bμ e σ_Y^2 = b² σ^2.

Tomando a = - μ / σ e b = 1 / σ obtemos a padronização

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Distribuição normal padrão ou reduzida.

Exemplo. Se X ~ N(90,100), determinar

(a) P(80 < X < 100),
(b) P(|X - 90| < 30) e
(c) o valor de a tal que P(90 - 2a < X < 90 + 2a) = 0,99.

Exemplo

$$(a)\, P(80 < X < 100) = P\left(\frac{80-90}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{100-90}{10}\right) = P(-1{,}00 < Z < 1{,}00)$$

$$= 2P(0 \le Z \le 1{,}00) = 2 \times 0{,}34134 - 1 = 0{,}68268.$$

$$(b)\, P(|X - 90| < 30) = P(-30 < X - 90 < 30) = P\left(-\frac{30}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{30}{10}\right)$$

$$= P(-3{,}00 < Z < 3{,}00) = 2P(0 < Z < 3{,}00)$$

$$= 2 \times 0{,}49865 = 0{,}99720.$$

$$(c)\, P(90 - 2a < X < 90 + 2a) = P(-2a < X - 90 < 2a) = P\left(-\frac{2a}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{2a}{10}\right)$$

$$= 2P(0 \le Z \le \frac{a}{5}) = 0{,}99 \Rightarrow P(0 \le Z < \frac{a}{5}) = 0{,}4975$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = 2{,}81 \Rightarrow a = 14{,}05.$$

Propriedade

Se $X_1,\ldots,X_n$ são v.a. independentes tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, para i = 1,...,n, então, a v.a.

$$Y = X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

é tal que $Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

Padronização:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Teorema central do limite

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição com média μ e desvio padrão σ $(0 < \sigma < \infty)$, então a distribuição aproximada de

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$$ é normal padrão N(0,1),

sendo que $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é a média amostral.

Observações.

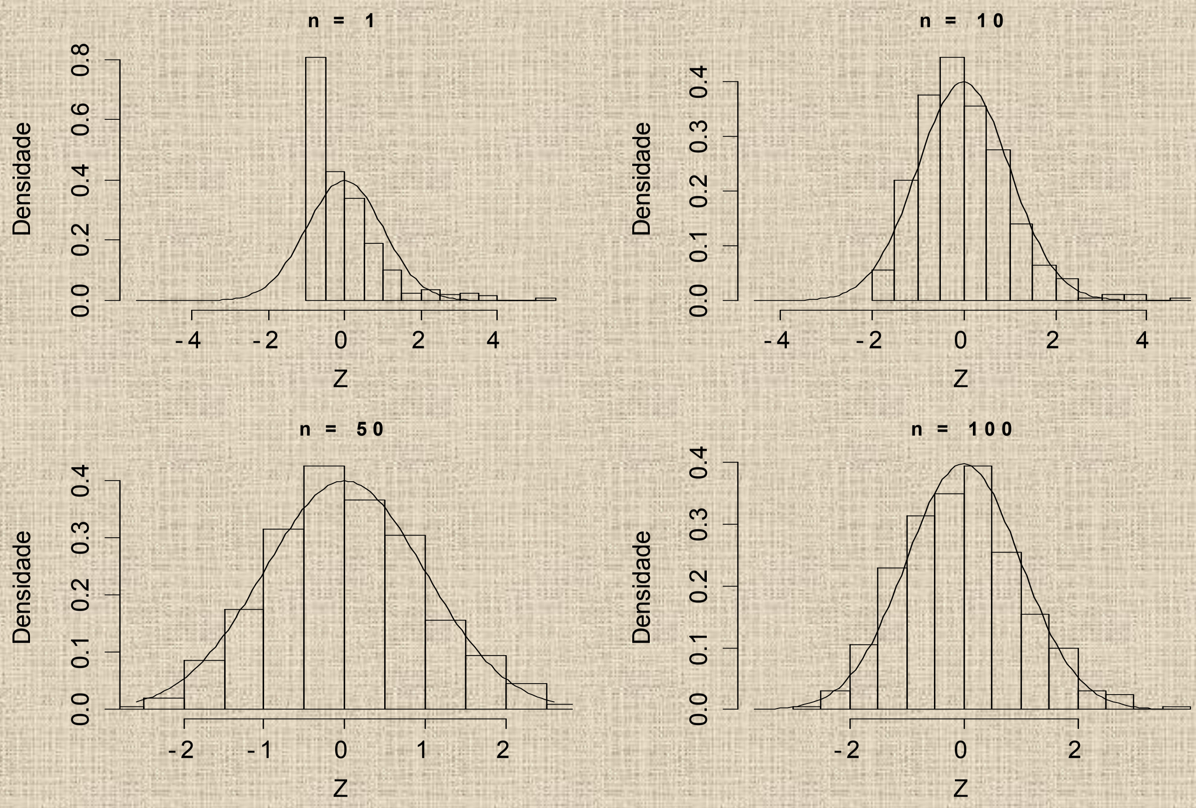
(1) Quanto maior n, melhor a aproximação.

(2) A distribuição das variáveis X pode ser discreta ou contínua.

(3) A distribuição aproximada de

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ é } N(n\mu, n\sigma^2).$$

Teorema central do limite – Distribuição exponencial



Teorema central do limite – Distribuição Bernoulli (p = 0,45)