

1. $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ é uma amostra aleatória de uma distribuição com $\boldsymbol{\mu} = (\mu_X, \mu_Y)^\top = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(Y_1))^\top$ e matriz de covariâncias

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

O coeficiente de correlação linear de Pearson amostral é denotado por r_n , para $n > 1$.

(a) Prove que $\sqrt{n}(r_n - \rho) \xrightarrow{D} W \sim \text{normal}(0, \lambda^2)$, sendo que a variância λ^2 deve ser escrita como função de $\boldsymbol{\Gamma} = \text{Cov}(\mathbf{W})$, em que $\mathbf{W} = ((X_1 - \mu_X)^2, (X_1 - \mu_X)(Y_1 - \mu_Y), (Y_1 - \mu_Y)^2)^\top$.

(b) Supondo que $(X_1, Y_1)^\top \sim \text{normal}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, prove que

$$\sqrt{n}(r_n - \rho) \xrightarrow{D} W \sim \text{normal}(0, (1 - \rho^2)^2).$$

Sugestão. A distribuição de $Y_1|X_1 = x$ é $\text{normal}(\mu_Y + \rho\sigma_2(x - \mu_X)/\sigma_1, \sigma_2^2(1 - \rho^2))$.

(c) Desenvolva um estudo de simulação de Monte Carlo para ilustrar o resultado do item anterior.

2. $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com momentos centrais $\mu_j = \mathbb{E}(X_1 - \mu)^j$ finitos, $j = 2, 3, \dots$, em que $\mu = \mathbb{E}(X_1)$. Os coeficientes $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$ e $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ são utilizados para quantificar assimetria e curtose de uma distribuição, respectivamente. Os momentos centrais amostrais são dados por $m_{jn} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^j/n$, para $j \geq 1$, em que $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$. Os coeficientes β_1 e β_2 podem ser estimados por $\hat{\beta}_{1n} = m_{3n}^2/m_{2n}^3$ e $\hat{\beta}_{2n} = m_{4n}/m_{2n}^2$.

(a) Verifique a consistência dos estimadores $\hat{\beta}_{1n}$ e $\hat{\beta}_{2n}$.

(b) Apresente a distribuição limite, quando $n \rightarrow \infty$, de

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1n} - \beta_1 \\ \hat{\beta}_{2n} - \beta_2 \end{pmatrix}.$$

3. X_{i1}, \dots, X_{in_i} são variáveis aleatórias independentes com distribuição $\text{normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $j = 1, \dots, n_i$ e $i = 1, \dots, k$. Definimos $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$, em que $\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i$, $i = 1, \dots, k$.

(a) Apresente a distribuição limite, quando $n_i \rightarrow \infty$, de $\sqrt{n_i}(S_i^2/n_i - \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, k$.

(b) Com base no item anterior, apresente sequências cujas distribuições limite não dependem de σ_i^2 , $i = 1, \dots, k$.