



Pesquisa Operacional / Programação Matemática

Planejamento e controle da produção
Método ótimo de Wagner-Whitin (WW)

Propriedade de uma solução ótima:

- Já vimos que sempre podemos assumir que em cada período produzimos para atender a demanda completa de um ou mais períodos.

$$X_1 = d_1 \text{ ou } X_1 = d_1 + d_2 \quad \dots \text{ ou } X_1 = d_1 + d_2 + \dots + d_T$$

$$X_2 = 0 \quad \text{ou} \quad X_2 = d_2 \quad \text{ou} \quad X_2 = d_2 + d_3 \quad \dots \text{ ou} \quad X_2 = d_2 + \dots + d_T$$

$$X_3 = 0 \quad \text{ou} \quad X_3 = d_3 \quad \text{ou} \quad X_3 = d_3 + d_4 \quad \dots \text{ ou} \quad X_3 = d_3 + \dots + d_T$$

...

$$X_T = 0 \quad \text{ou} \quad X_T = d_T.$$

Representação

- Suponha o problema anterior, com 5 períodos.
- Podemos representar o plano de produção por cinco variáveis que indicam se há produção no período:

$\left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ se há produção} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{array} \right.$

0/1	0/1	0/1	0/1	0/1
-----	-----	-----	-----	-----

T = 1 2 3 4 5

Representação (ex)

1	0	1	0	0
---	---	---	---	---

T = 1 2 3 4 5

Indica que há produção:

no período 1 (para atender as demandas de 1 e 2)

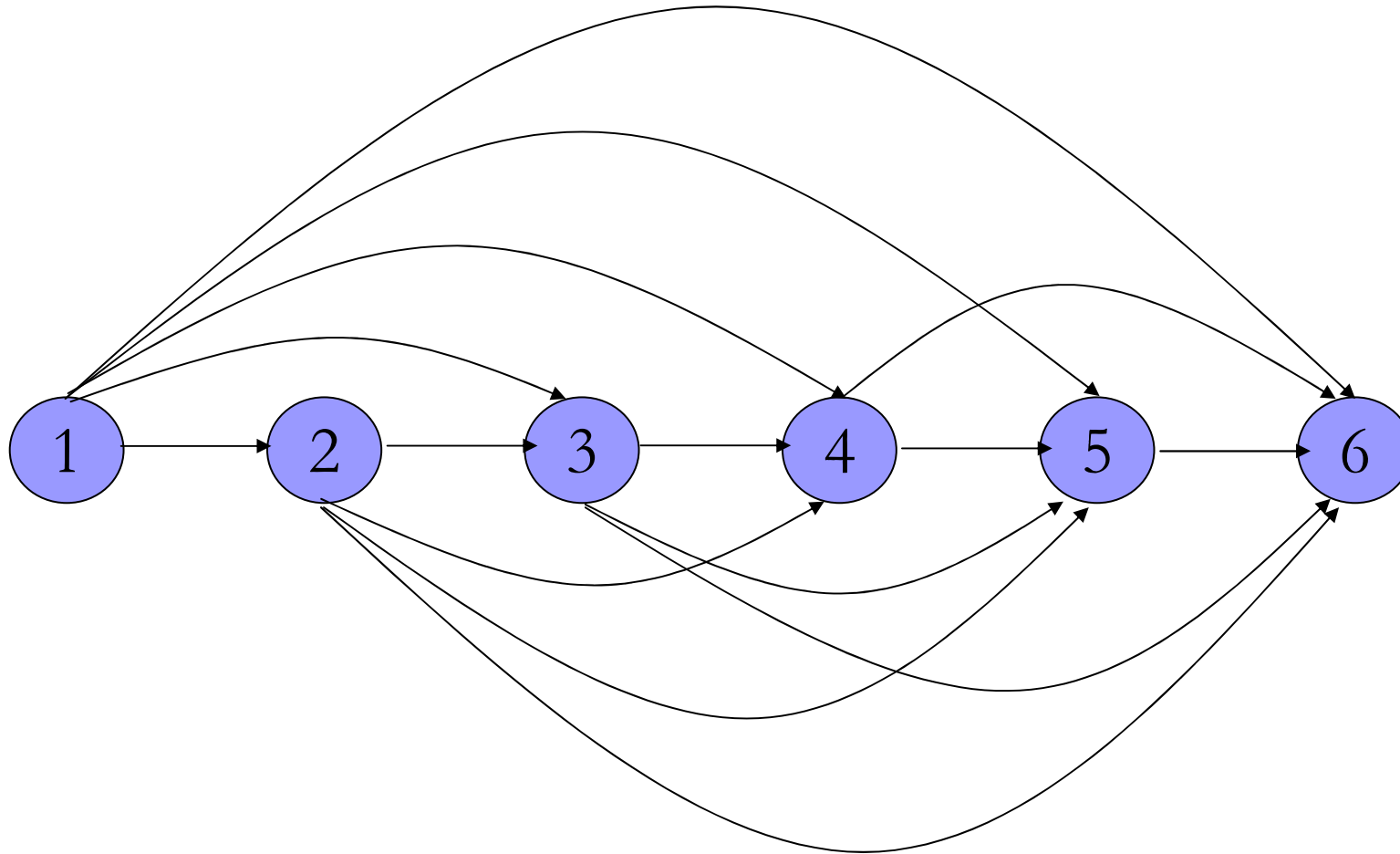
no período 3 (para atender as demandas de 3,4 e 5)



Representação por grafos

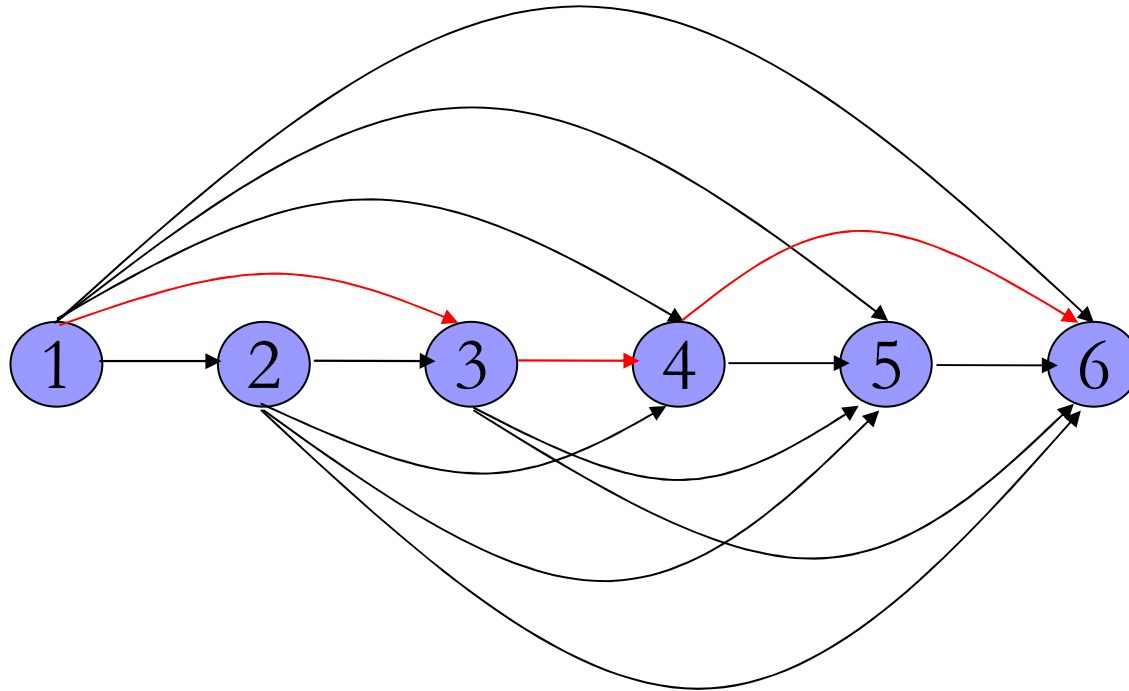
- Podemos construir uma representação por grafos.
- Cada nó é um período. O nó final é um período artificial (fim do horizonte de planejamento)
- Um arco ij indica que a existe produção no período i e o próximo período de produção é j .

Representação por grafos



Um caminho indica um plano de produção!

Representação por grafos



1-3-4-6:

produzir em **1** para 1 e 2

produzir em **3** para 3

produzir em **4** para 4 e 5

1	0	1	1	0
---	---	---	---	---

- Associando os custos adequados aos arcos, podemos escolher o caminho de custo mínimo.

$$C_{12} = 40 + 20 = 60$$

$$C_{13} = 40 + 0,30(20) + 40 = 46 + 40 = 86$$

$$C_{14} = 40 + 0,30(20 + 2*30) + 70 = ~~104~~ 134$$

$$C_{15} = 40 + 0,30(20 + 2*30 + 3*20) + 90 = 172$$

$$C_{16} = 40 + 0,30(20 + 2*30 + 3*20 + 4*30) + 120 = 238$$

$$C_{23} = 40 + 20 = 60$$

$$C_{24} = 40 + 0,30(30) + 50 = 99$$

$$C_{25} = 40 + 0,30(30 + 2*20) + 70 = 131$$

$$C_{26} = 40 + 0,30(30 + 2*20 + 3*30) + 100 = 188$$

$$C_{34} = 40 + 30 = 70$$

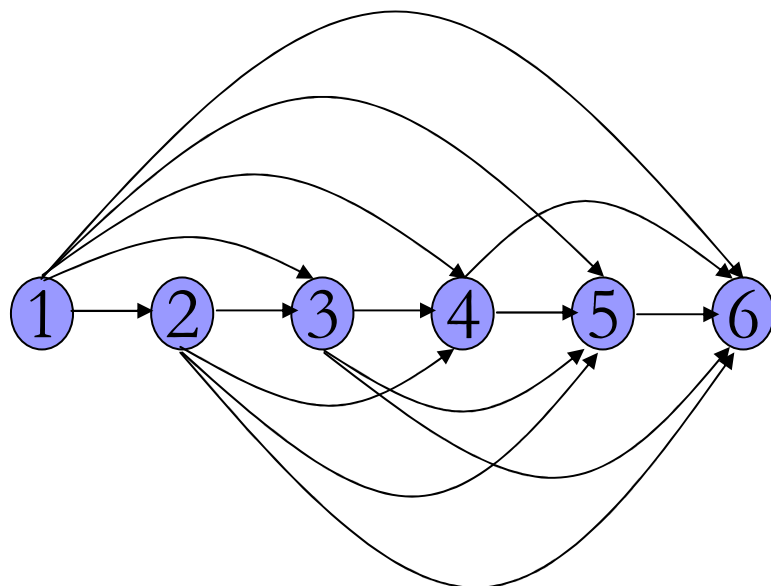
$$C_{35} = 40 + 0,30(20) + 50 = 96$$


$$C_{36} = 40 + 0,30(20 + 2*30) + 80 = 144$$

$$C_{45} = 40 + 20 = 60$$

$$C_{46} = 40 + 0,30(30) + 50 = 99$$

$$C_{56} = 40 + 30 = 70$$



- 
- Como os arcos sempre saem de i para j , com $i < j$, podemos usar facilmente a fórmula:

$$F_t = \text{mínimo} \{ F_j + C_{jt}, \forall j < t \} \quad t = 2, 3, \dots, T+1.$$

$$F_1 = 0 \quad (\text{condição inicial})$$

$$F_2 = \text{mínimo}\{F_1 + C_{12}\} = 0 + 60 = 60 \quad \text{PRED}(2) = 1 \quad (\text{ neste caso, há somente uma maneira de atingir o nó 2})$$

$$F_3 = \text{mínimo}\{F_j + c_{j3}, j=1,2\} = \min \left\{ \begin{array}{l} F_1 + c_{13} \\ F_2 + c_{23} \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 86 \\ 60 + 60 \end{array} \right\} = 86 \quad \text{PRED}(3)=1$$

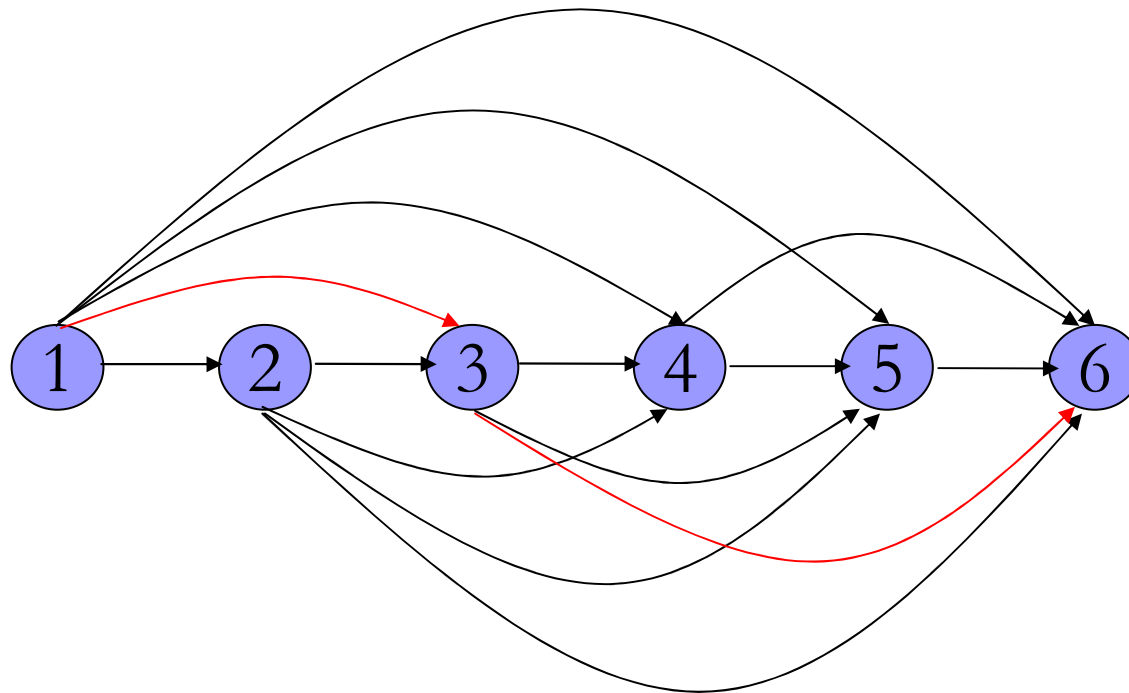
$$F_4 = \text{mínimo}\{F_j + c_{j4}, j=1,2,3\} = \min \left\{ \begin{array}{l} F_1 + C_{14} \\ F_2 + C_{24} \\ F_3 + C_{34} \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 104 \\ 60 + 99 \\ 86 + 70 \end{array} \right\} = 104 \quad \text{PRED}(4)=1$$

$$F_5 = \min\{F_j + c_{j5}, j=1,2,3,4\} = \min \left\{ \begin{array}{l} F_1 + C_{15} \\ F_2 + C_{25} \\ F_3 + C_{35} \\ F_4 + C_{45} \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 172 \\ 60 + 131 \\ 86 + 96 \\ 104 + 60 \end{array} \right\} = 164 \quad \text{PRED}(5)=4$$

$$F_6 = \min\{F_j + c_{j6}, j=1, \dots, 6\} = \min \left\{ \begin{array}{l} F_1 + C_{16} \\ F_2 + C_{26} \\ F_3 + C_{36} \\ F_4 + C_{46} \\ F_5 + C_{56} \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0 + 238 \\ 60 + 188 \\ 86 + 144 \\ 104 + 99 \\ 164 + 70 \end{array} \right\} = 230 \quad \text{PRED}(6)=3$$

Resolvendo

- Podemos usar os algoritmos vistos antes.



produzir em 1 e em 3.

Solução ótima

Solução Wagner e Whitin: custo total R\$ 230,00

Semana	1	2	3	4	5
Demanda	20	20	30	20	30
Produção	40	0	80	0	0
Estoque	20	0	50	30	0
Custo produção	40,00	0	80,00	0	0
Custo preparação	40,00	0	40,00	0	0
Custo estocagem	6,00	0	24,00	0	0

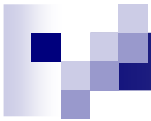
Tabela 11. Solução Wagner whitin para o exemplo 1.



Pergunta

- Por que estudar heurísticas se temos um algoritmo ótimo eficiente ?

R. ótimo em um horizonte de planejamento fixo. Em horizontes de planejamento rolantes é comum a heurística de SM apresentar melhores resultados que WW.



Exercício 16. Agora aplique as heurísticas e o método ótimo de Wagner e Whitin no exemplo a seguir e compare os resultados:

semana	1	2	3	4	5	6
demanda	42	42	32	120	26	112

Custo de Preparação: R\$ 132,00

Custo de Estocagem: R\$ 0,60

Custo de Produção: R\$ 1,00

Para cada método use o seguinte formato de tabela para descrever o planejamento da produção:

semana	1	2	...	n
demanda	42	42	...	38
Produção				
Estoque				
Custo de Preparação				
Custo de Produção				
Custo de Estoque				

Custo Total: R\$