Lista 5 - SMA0333-Cálculo III e SMA0356-Cálculo IV

1. Utilize as séries de Fourier calculadas nos exercícios da Lista 4 para resolver o problema de condução do calor com condição de Dirichlet nos seguintes casos:

(a) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = 25, \quad x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = senx, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & se \;\; x \in [0,\ \pi/2] \\ \pi - x, & se \;\; x \in [\pi/2,\ \pi] \end{cases} \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = cosx, \quad x \in (0,\pi). \end{cases}$$

2. Encontre a solução do problema da condução do calor com condição de Neumann nos seguintes casos:

(a) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0\pi) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = 25, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = senx, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & se \;\; x \in [0,\ \pi/2] \\ \pi - x, & se \;\; x \in [\pi/2,\ \pi] \end{cases} \end{cases}$$

(d) $\begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = cosx, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$

3. Encontre a solução do problema da corda vibrante com extremidades fixas nos seguintes casos:

(a) $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = 25, u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,\pi). \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = senx \quad x \in (0,\pi). \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = 0 \quad x \in (0,\pi). \end{cases}$

(d) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = x \quad x \in (0,\pi). \end{cases}$

4. (Problema da condução do calor com condições de fronteira não homogêneas).

(a) Calcule a solução estacionária de $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = -1,\ u(\pi,t) = 1, \quad t \in [0,\infty). \end{cases}$

(b) Use a parte a) para encontrar a solução dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = -1,\ u(\pi,t) = 1, \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(0,t) = -1; \quad u(\pi,t) = 1, \quad t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = 1 - x \end{cases}$$

(c) Para onde as soluções do item b) convergem quando $t \to \infty$?

5. (a) Determine a solução de $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & x \in (0,\pi), t \in (0,\infty) \\ u_x(0,t) = 0 \quad u_x(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = ax + b, & x \in [0,\pi] \end{cases}$

   (b) Determine um para (a,b) de números reais para que $\lim_{t\to\infty} u(\pi/2,t) = 100$.

6. (Problema 15, Boyce-DiPrima, Section 10.6, page 589) Considere uma barra de comprimento L com temperatura incial $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$. Suponha que na extremidade $x = 0$ a temperatura é 0 ($u(0,t) = 0$ para todo $t \geq 0$), enquanto que a extremidade L está isolada ($u_x(L,t) = 0$ para todo $t \geq 0$). Encontre temperatura $u(x,t)$. Faça $t \to \infty$ para encontrar a temperatua estacionária.

7. (Problema 1, Boyce-DiPrima, Section 10.7, page 600) Considere uma corda de comprimento L com as extremidades mantidas fixas. A corda é posta em movimento com velocidade incial nula a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x)$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$
   Encontre o deslocamento $u(x,t)$.

8. (Problema 5, Boyce-DiPrima, Section 10.7, page 600) Considere uma corda de comprimento L com as extremidades mantidas fixas. A corda é posta em movimento a partir da posição de equilíbrio ($u(x,0) = 0$) com velocidade inicial $u_t(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$.
   Encontre o deslocamento $u(x,t)$.

9. (Problema 9, Boyce-DiPrima, Section 10.7, page 601) Encontre o deslocamento $u(x,t)$ de uma corda de comprimento L fixada $x = 0$ ($u(0,t) = 0$) e livre em $x = L$ ($u_x(L,t) = 0$) e que posta em movimento a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x)$ com velocidade nula.

10. (Problema 10, Boyce-DiPrima, Section 10.7, page 601) Encontre o deslocamento $u(x,t)$ de uma corda de comprimento L fixada $x = 0$ ($u(0,t) = 0$) e livre em $x = L$ ($u_x(L,t) = 0$) e que posta em movimento a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x)$ com velocidade nula, onde $f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

    (a) Encontre o deslocamento $u(x,t)$

(b) Com $L = 10$ e $a = 1$, esboce o gráfico de u versus x para $0 \leq x \leq 10$ e para vários valores de t. Dê particular atenção para os valores de t entre 3 e 7. Observe como o deslocamento inicial é refletido em cada extremo da corda.

(c) Com $L = 10$ e $a = 1$, esboce o gráfico de u versus t para vários valores de x.

(d) Construa uma animação da solução em relação a t para pelo menos um período.

11. (Problema 5, Boyce-DiPrima, Section 10.8, page 612) Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{rr} = 0$$

no exterior do disco de raio $r = a$, satisfazendo a condição de fronteira

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

no bordo do disco de raio a.

12. (Problema 8, Boyce-DiPrima, Section 10.8, page 612) Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace no setor circular $0 < r < a$, $0 < \theta < \alpha$, que satisfaz as condições de fronteira: $u(r, 0) = 0$, $u(r, \alpha) = 0$, $0 \leq r < a$, e $u(a, \theta) = f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \alpha$. Admita que u seja limita no setor.

13. (Problema 10, Boyce-DiPrima, Section 10.8, page 612) Considere o problema de encontrar uma solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, com condições de fronteira

$$\begin{aligned} u_x(0, y) = 0, \quad & u_x(a, y) = f(y) \quad , 0 < y < b \\ u_y(x, 0) = 0, \quad & u_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Este é um exemplo de um problema de Neumann paraa equação de Laplace no retângulo.

(a) Mostre que a equação de Laplace e as condições de fronteira determinam o seguinte conjunto fundamental de soluções:

$$u_0(x, y) = c_0, \quad u_n(x, y) = c_n \cosh(n\pi x/b) \cos(n\pi y/b), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Use a parte (a) para determinar a solução do problema. Note que que quando $u_x(a, y)$ é calculada, o termo constante em $u(x, y)$ é eliminado, e não há condição para determinar c_0. Além disso, deve ser possível expressar f por meio de um série de Fourier de cossenos de período $2b$, sem o termo constante. Isto significa que

$$\int_a^b f(y)dy = 0$$

é uma condução necessária para que o problema tenha solução. Finalmente, note que c_0 é arbitrário, e portanto a solução do problema é determinado a menos de uma constante aditiva. Esta é uma propriedade que todo problema de Neumann possui.

14. (Problema 16, Boyce-DiPrima, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

onde f é periódica com período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{se } 0 < t < 1 \\ -1 + t & \text{se } 1 \le t < 2 \end{cases}$$