$7^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE ESTATÍSTICA I - SME 0320

Exercício 1 (*Walpole et al. 9.2 e 9.3 p. 180)*. Se X é uma variável aleatória binomial, mostre que

(a) $\hat{p}_1 = X/n$ é um estimador não viciado de p.

(b) $\hat{p}_2 = \frac{X+\sqrt{n}/2}{n+\sqrt{n}}$ é um estimador viciado de p.

(c) Mostre que o estimador $\hat{p}_2$ se torna não viciado quando $n \to \infty$.

Exercício 2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a. a. de uma população com distribuição Poisson(θ). Verifique se o estimador $\overline{X}$ do parâmetro θ é não viciado.

Exercício 3 (*Bussab e Morettin 44 p. 329)*. Para estimar a média μ desconhecida de uma população, foram propostos dois estimadores não viesados e independentes $\widehat{\mu}_1$ e $\widehat{\mu}_2$, de tal forma que $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_1) = \mathrm{Var}(\widehat{\mu}_2)/3$, Considere os seguintes estimadores ponderados de μ:

(a) $\widehat{\mu}_3 = (\widehat{\mu}_1 + \widehat{\mu}_2)/2$.

(b) $\widehat{\mu}_4 = (4\widehat{\mu}_1 + \widehat{\mu}_2)/5$.

(c) $\widehat{\mu}_5 = \widehat{\mu}_1$.

(i) Quais dos estimadores $\widehat{\mu}_3$, $\widehat{\mu}_4$ e $\widehat{\mu}_5$ são não viesados?

(ii) Disponha esses estimadores em ordem crescente de eficiência.

Exercício 4. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma a. a. de uma população com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1},\ 0 \le x \le 1, 0 \le \theta < \infty.$$

Encontre o estimador pelo método dos momentos de θ.

Exercício 5 (*Bussab e Morettin 12 p. 310)*. Suponha que X seja uma v. a. com distribuição normal, com média μ e variância 1. Obtenha o EMV de μ, para uma amostra de tamanho n, $X_1, \ldots, X_n$.

Exercício 6 (*Bussab e Morettin 13 p. 310)*. Considere Y uma v. a. com distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda > 0$. Obtenha o EMV de λ, baseado numa amostra de tamanho n.

Exercício 7 (*Walpole et al. 9.82 p. 199)*. Considere uma amostra de n observações de uma distribuição Weibull com parâmetros α e β e função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}, x > 0 \\ 0,\ \text{caso contrário}, \end{cases}$$

para $\alpha, \beta > 0$.

(a) Escreva a função de verossimilhança

(b) Escreva as equações que, quando resolvidas, fornecem os estimadores de máxima verossimilhança de α e β.

Exercício 8 (*Walpole et al. 9.85 p. 199)*. Considere um experimento hipotético no qual um homem com um fungo usa uma droga antifúngica e é curado. Considere isso, então, uma amostra de uma distribuição de Bernoulli com função de probabilidade

$$f(x) = p^x q^{1-x}, x = 0, 1,$$

em que p é a probabilidade de sucesso (cura) e $q = 1 - p$. É claro, a informação da amostra fornece $x = 1$. Escreva um desenvolvimento que mostra que $\hat{p} = 1$ é o estimador de máxima verossimilhança da probabilidade de cura.

Exercício 9 (*Meyer 14.8 p.366)*. Suponha que X seja uniformemente distribuído sobre $(-\alpha, \alpha)$. determine a estimativa de MV de α, baseada em uma amostra de tamanho n.

Exercício 10 (*Meyer 14.4 p.365)*. Uma variável aleatória X tem f. d. p. $f(x) = (\beta+1)x^{\beta},\ 0 < x < 1$.

(a) Calcule o estimador de máxima de verossimilhança de β baseado numa amostra de tamanho n.

(b) Calcule a estimativa de MV de β quando os valores amostrais forem: 0,3; 0,8; 0,27; 0,35; 0,62 e 0,55.

Exercício 11 (*Meyer 14.9 p.366)*. **(a)** Um procedimento é realizado até que um particular evento A ocorra pela primeira vez. Em cada repetição, $P(A) = p$. Suponha que sejam necessárias n_1 repetições. Depois, esse experimento é repetido e, agora, n_2 repetições são necessárias para produzir-se o evento A. Se isso foi feito k vezes, obteremos a amostra $n_1, \ldots, n_k$. Baseando-se nessa amostra, determine o EMV de p.
(b) Admita que k seja bastante grande. Determine o valor aproximado de $\mathrm{E}(\hat{p})$ e $\mathrm{Var}(\hat{p})$, em que é o estimador de MV obtido em (a).

Exercício 12 (*Meyer 14.15 p.367)*. Suponha que X tenha uma distribuição gama; isto é, sua f. d. p. seja dada por

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, x > 0.$$

Suponha que r seja conhecido e seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a. a. de X. Determine o EMV de λ baseado nesta amostra.

Exercício 13 (*Walpole et al. 9.4 p. 199)*. Suponha que X tenha uma distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$, onde θ é desconhecido. Uma amostra de n observações $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é retirada. Sabemos que $E(X) = E(X_i) = \theta/2$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_i) = \theta^2/12$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, se calcularmos a média amostral $\overline{X}$, essa deve estar próxima de $\theta/2$ e podemos estimar θ por $\widehat{\theta} = 2\overline{X}$.

(a) Calcule $E(\widehat{\theta})$.

(b) Calcule $EQM(\widehat{\theta})$.

(c) $\widehat{\theta}$ é consistente? Por quê?

Exercício 14 (*Walpole et al. E.9.4 e 9.8 p. 180)*. Uma indústria elétrica fabrica lâmpadas com vida útil distribuída aproximadamente normal, com desvio-padrão de 40 horas.

(a) Se uma amostra de 30 lâmpadas tem média de vida de 780 horas, determine um intervalo de confiança de 96% para a média populacional de todas as lâmpadas produzidas pela empresa.

(b) Qual deve ser o tamanho da amostra se desejarmos estar 96% confiantes de que nossa média amostral estará dentro das dez horas da média verdadeira?

Exercício 15 (*Walpole et al. E.9.54 e 9.61 p.193)*. **(a)]** Calcule o intervalo de confiança de 98% para a proporção de itens defeituosos em um processo quando se sabe que uma amostra de tamanho 100 gera oito itens defeituosos. **(b)]** Qual é o tamanho da amostra necessário se desejarmos estar 98% confiantes de que a proporção amostral estará a 0,05 da proporção real de defeituosos?

Exercício 16 (*Walpole et al. E.9.55 p.193)*. Um novo sistema de lançamentos de foguetes está sendo considerado para a implementação de foguetes pequenos e de certo alcance. O sistema existente tem $p = 0,8$ como probabilidade de um lançamento bem-sucedido. Uma amostra de 40 lançamentos experimentais como o novo sistema é realizada e 34 obtêm sucesso. Construa um intervalo de confiança de 95% para p. O sistema é melhor?

Algumas respostas: **5** $\widehat{\mu}_{MV} = \overline{x}$. **6** $\widehat{\lambda}_{MV} = \overline{x}$. **10** $\widehat{\beta}_{MV} = -1 - n/\sum_{i=1}^{n} \log x_i$. **11** (a) $k/\sum_{i=1}^{k} n_i$. **12** $r/\overline{x}$. **14** (a) [765,795] (b) 68. **15** (a) [0.017, 0.143] (b) 160.