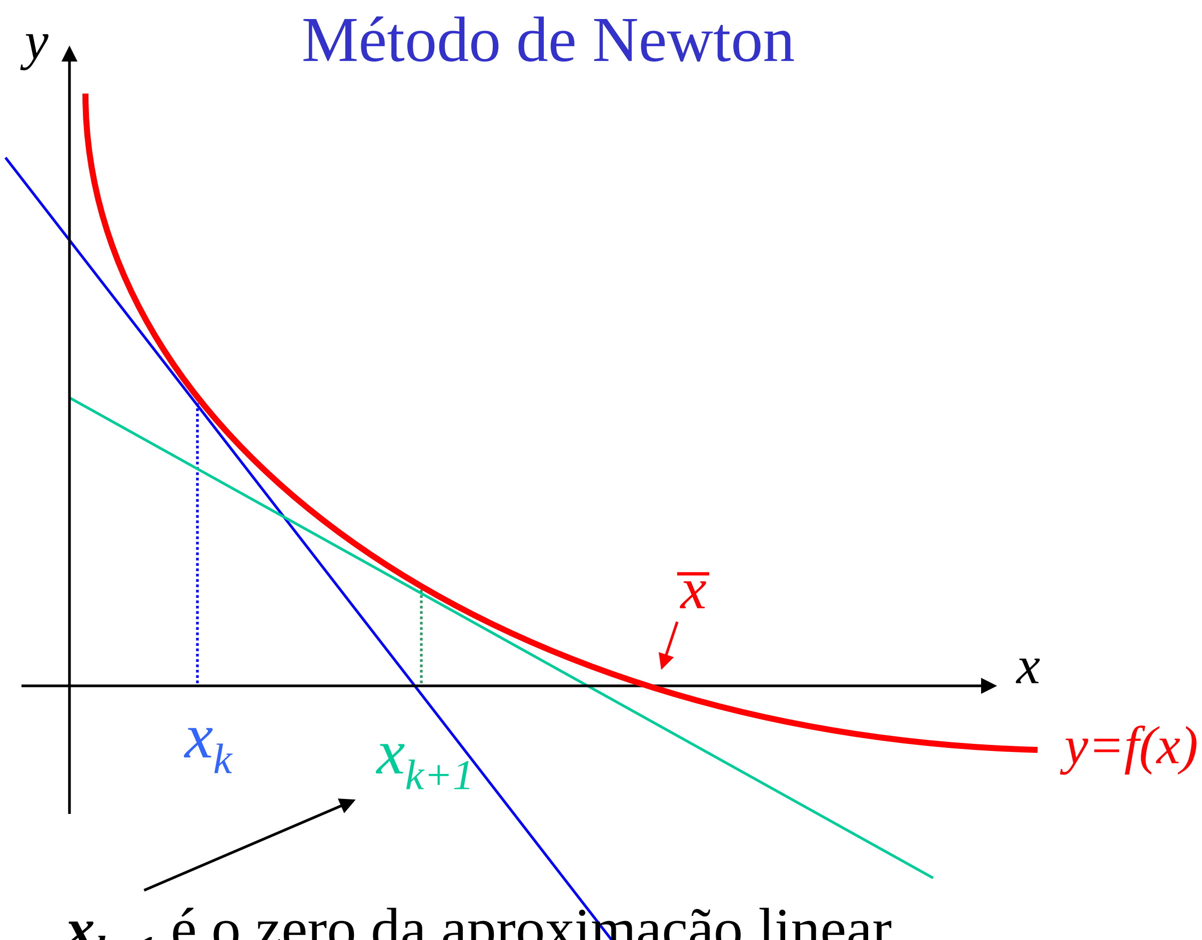
Revisão: *Zero de funções* $f(x) = 0 \quad f : \Re \to \Re$



$$f(x_k) + f'(x_k)z = 0$$

$$z = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + z =$$

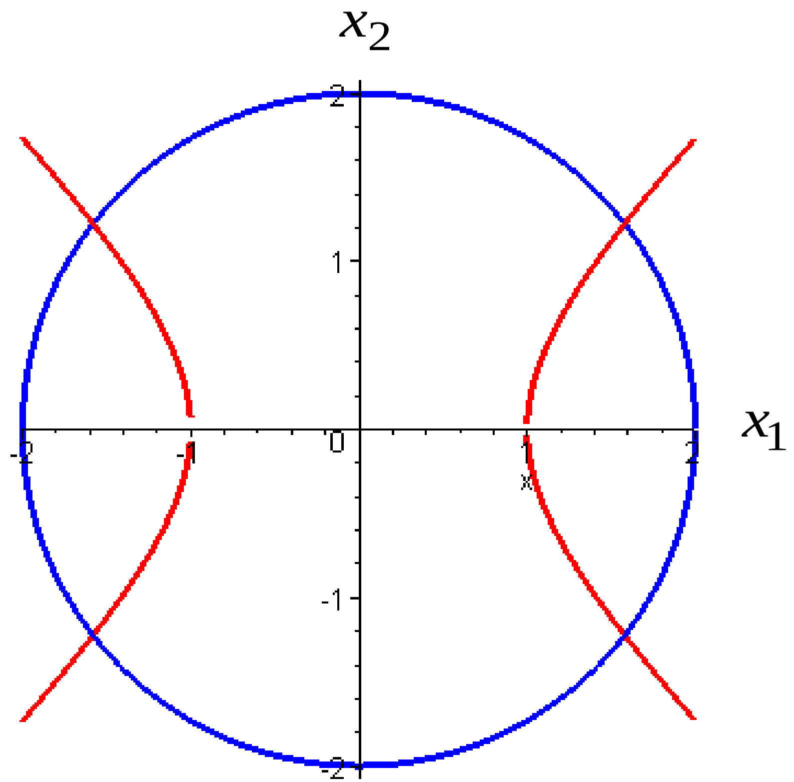
$$= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$\boldsymbol{x_{k+1}}$ é o zero da aproximação linear

$$f(x_k) + f'(x_k)\underbrace{(x - x_k)}_{z} = 0$$

$x_{k+1} = x_k + z$

Sistemas não-lineares: *Ilustração*



$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ x_1^2 - x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo:

$$f_1(x_1,\, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

$$f_2(x_1,\, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$$

Na forma matricial:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F : \Re^2 \rightarrow \Re^2$$

Sistemas não-lineares: *Forma geral*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$F : \Re^n \to \Re^n$$

$$\mathbf{x} \in \Re^n, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Aproximação linear de $F : \Re^n \rightarrow \Re^n$

Considere uma função *f* não-linear em **x,** $f : \Re^n \rightarrow \Re$

$$f(x_1 + z_1,\ x_2 + z_2,\ \cdots,\ x_n + z_n) \cong$$

$$\cong f(x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n) + \frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_2} z_2 + \ldots + \frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_n} z_n =$$

$$= f(\mathbf{x}) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\nabla f(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})\,\mathbf{z}$$

O vetor das derivadas parciais da função *f* :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

é denominado vetor gradiente de $f(\mathbf{x})$.

Temos a aproximação linear:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{z}) \cong f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{z} \qquad \text{com} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$$

No sistema não-linear, temos:

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{x}^k+\mathbf{z}) &\cong f_1(\mathbf{x}^k) + \nabla f_1(\mathbf{x}^k)\cdot\mathbf{z} \\
f_2(\mathbf{x}^k+\mathbf{z}) &\cong f_2(\mathbf{x}^k) + \nabla f_2(\mathbf{x}^k)\cdot\mathbf{z} \\
&\vdots \\
f_n(\mathbf{x}^k+\mathbf{z}) &\cong f_n(\mathbf{x}^k) + \nabla f_n(\mathbf{x}^k)\cdot\mathbf{z}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\phantom{f_1(\mathbf{x}^k+\mathbf{z})}}_{F(\mathbf{x}^k+\mathbf{z})} \qquad \underbrace{\phantom{f_1(\mathbf{x}^k)}}_{F(\mathbf{x}^k)}$$

$$\equiv \quad F(\mathbf{x}^k+\mathbf{z}) \cong F(\mathbf{x}^k) + \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}^k) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix}\cdot\mathbf{z}$$

$$\Rightarrow F(\mathbf{x}^k+\mathbf{z}) \cong \underbrace{F(\mathbf{x}^k)}_{\textbf{vetor}} + \underbrace{F'(\mathbf{x}^k)}_{\substack{\textbf{matriz} \\ \textbf{Jacobiana} \\ n\times n}} \cdot\mathbf{z}$$

$$F(\mathbf{x}) = 0, \qquad F: \Re^n \to \Re^n$$

$$F(\mathbf{x}^k + \mathbf{z}) \cong \underbrace{F(\mathbf{x}^k)}_{\textbf{vetor}} + \underbrace{F'(\mathbf{x}^k)}_{\substack{\textbf{matriz}\\ \textbf{Jacobiana}\\ n\times n}} \cdot \mathbf{z}$$

A matriz das derivadas parciais de $F(\mathbf{x})$ é chamada *matriz Jacobiana*:

$$= \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x})^t \\ \nabla f_2(\mathbf{x})^t \\ \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{x})^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

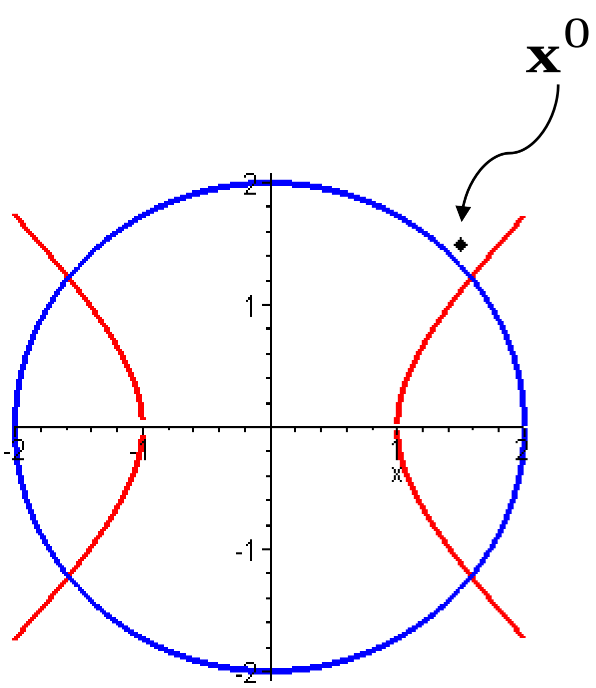
Exemplo:

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0, \qquad \nabla f_1(\mathbf{x}) = (2x_1 \;\; 2x_2)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0, \qquad \nabla f_2(\mathbf{x}) = (2x_1 \;\; -2x_2)$$

$$\underbrace{F'(\mathbf{x})}_{\substack{\textbf{matriz}\\ \textbf{Jacobiana}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

Considere o ponto inicial: $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$



Método de Newton para sistemas não-lineares:

$$F(\mathbf{x}^k+\mathbf{z}) \cong \underbrace{F(\mathbf{x}^k)+F'(\mathbf{x}^k)\cdot\mathbf{z} = 0}$$

sistema linear nas variáveis
$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^t$

Se existe inversa de $F´(\mathrm{x}^k)$ então o sistema tem solução única.

$$\underbrace{F'(\mathbf{x}^k)}_{\textbf{matriz}}\cdot\underbrace{\mathbf{z}}_{\textbf{variáveis}} = \underbrace{-F(\mathbf{x}^k)}_{\textbf{vetor}}$$

Método de Newton:

Resolva: $F'(\mathbf{x}^k)\cdot\mathbf{z} = -F(\mathbf{x}^k)$

Próximo ponto: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{z}$

Método de Newton para sistemas não-lineares:

Resolva: $F'(\mathbf{x}^k) \cdot \mathbf{z} = -F(\mathbf{x}^k)$

Próximo ponto: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{z}$

Método de Newton gera uma seqüência:

$$\underbrace{\mathbf{x}^0}_{\substack{aproximação \\ inicial}} \rightarrow \mathbf{x}^1 \rightarrow \mathbf{x}^2 \rightarrow \mathbf{x}^3 \rightarrow \cdots$$

Exercício: Mostrar que se a seqüência convergir, $\left\{ \mathbf{x}^k \right\} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$,

então $\bar{\mathbf{x}}$ é a solução do sistema: $F(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

hipóteses: $F \in C'$, $\det(F'(\mathbf{x}^k)) \neq 0$, $\det(F'(\bar{\mathbf{x}})) \neq 0$.

Algoritmo

Passo Inicial: Escolha $\mathbf{x}^0$: *aproximação inicial*

Faça $\boldsymbol{k} = 0$: $\boldsymbol{k}$ *é o contador de iterações*

$$\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty = \max\{|z_1|, \cdots, |z_n|\}$$

$\varepsilon = 10^{-5}$: *tolerância*

PARE = Falso

MÁXIMO = 20 : *número máximo de iterações*

Passo Principal: Enquanto PARE = Falso e $\boldsymbol{k} \leq$ MÁXIMO, faça:

calcule: $\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^0)$

resolva o sistema: $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$

determine: $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{z}$

se $\|\mathbf{z}\|_\infty < \varepsilon$

então PARE = Verdadeiro

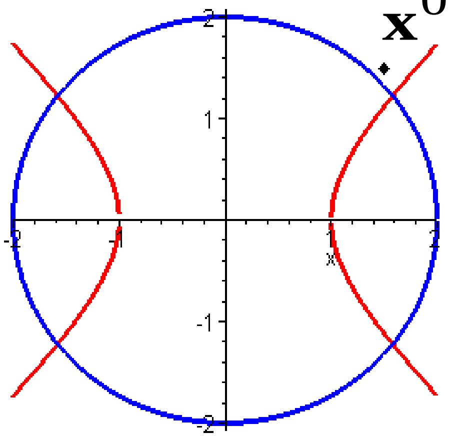
senão $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1$; $k = k+1$

Passo Final: Se $\boldsymbol{k}$ = MÁXIMO

então não convergiu com o número máximo de iterações,

senão $\mathbf{x}^1$ é a solução do problema.

Resolução do Exemplo:



$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4, \qquad \nabla f_1(\mathbf{x}) = (2x_1 \;\; 2x_2)$$
$$f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 - 1, \qquad \nabla f_2(\mathbf{x}) = (2x_1 \;\; -2x_2)$$

$$\underbrace{F'(\mathbf{x})}_{\substack{\textbf{matriz}\\ \textbf{Jacobiana}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo no ponto inicial: $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$

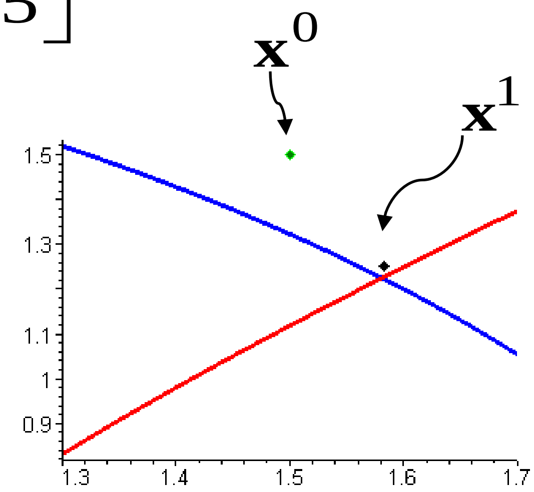
$$\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^0) = -\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^0) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ f_2(\mathbf{x}^0) = x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Resolva o sistema: $\mathbf{Az}=\mathbf{b}$

Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}=\begin{bmatrix} 0{,}0833 \\ -0{,}25 \end{bmatrix}$$



Determine nova solução: $\mathbf{x}^{k+1}=\mathbf{x}^k+\mathbf{z}$

$$\mathbf{x}^1=\mathbf{x}^0+\mathbf{z}=\begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0{,}0833 \\ -0{,}25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1{,}5833 \\ 1{,}25 \end{bmatrix}$$

Teste de parada: $\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty=\max\left\{|z_1|,\cdots,|z_n|\right\}<\varepsilon$

$$\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty=\max\left\{|0{,}0833|,|-0{,}25|\right\}=0{,}25>\varepsilon=0{,}01$$

Continua, $k = k + 1 = 1$

$2^{a.}$ iteração:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5833 \\ 1{,}25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^1) = -\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}0693 \\ -0{,}0557 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0693 \\ 0{,}0557 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}1667 & 2{,}5 \\ 3{,}1667 & -2{,}5 \end{bmatrix}$$

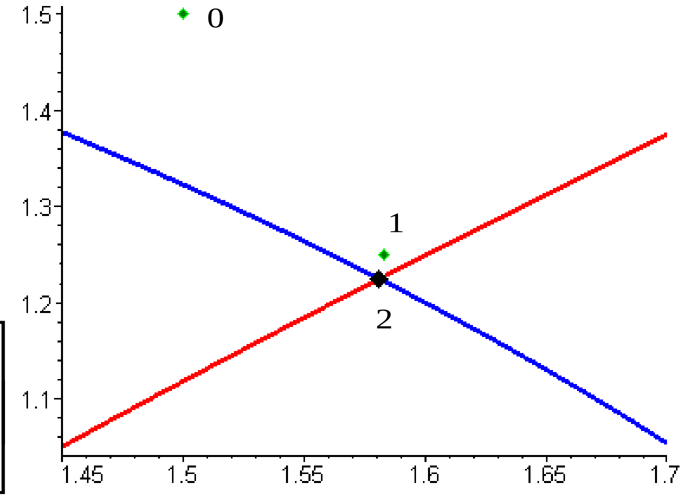
Resolva o sistema: $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 3{,}1667 & 2{,}5 \\ 3{,}1667 & -2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0693 \\ 0{,}0557 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -0{,}0021 \\ -0{,}025 \end{bmatrix}$$

Determine nova solução:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1{,}5833 \\ 1{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0021 \\ -0{,}025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5812 \\ 1{,}225 \end{bmatrix}$$



Teste de parada: $\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty = \max\left\{|z_1|, \cdots, |z_n|\right\} < \varepsilon$

$$\left\|\mathbf{z}^k\right\|_\infty = \max\left\{|-0{,}0021|, |-0{,}025|\right\} = 0{,}025 > \varepsilon = 0{,}01$$

Continua, $k = k + 1 = 2$

3ª. iteração:

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5812 \\ 1{,}225 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = -F(\mathbf{x}^2) = -\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}000818 \\ -0{,}000431 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}000818 \\ 0{,}000431 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = F'(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}1624 & 2{,}45 \\ 3{,}1624 & -2{,}45 \end{bmatrix}$$

Resolva o sistema: $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 3{,}1624 & 2{,}45 \\ 3{,}1624 & -2{,}45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}000818 \\ 0{,}000431 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -0{,}0000612 \\ -0{,}000255 \end{bmatrix}$$

Determine nova solução: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^{k} + \mathbf{z}$

$$\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1{,}5812 \\ 1{,}225 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}0000612 \\ -0{,}000255 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5811 \\ 1{,}2247 \end{bmatrix}$$

Teste de parada: $\left\| \mathbf{z}^k \right\|_\infty = \max \left\{ |z_1|, \cdots, |z_n| \right\} < \varepsilon$

$$\left\| \mathbf{z}^k \right\|_\infty = \max \left\{ |-0{,}0000612|, |-0{,}000255| \right\} = 0{,}000255 < \varepsilon = 0{,}01$$

Pare = Verdadeiro

Solução: ***k = 3***

$$\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5811 \\ 1{,}2247 \end{bmatrix}$$

Método convergiu em
3 iterações!!

Teorema: Seja $\mathbf{F} \in C^2$ e $\mathbf{x}^*$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.
Suponha que $\det(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^*)) \neq 0$ e considere uma vizinhança de $\mathbf{x}^*$ (denotada por $V(\mathbf{x}^*)$) tal que $\det(\mathbf{F}'(\mathbf{x})) \neq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}(\mathbf{x}^*)$.
(Por simplicidade de notação, denotamos $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}^*$ para $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(\mathbf{x}^*)$).

Se $\mathbf{x}^0 \approx \mathbf{x}^*$, então a sequência gerada pelo método de Newton converge para $\mathbf{x}^*$ quadraticamente: $\| \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^* \| \leq C \, \| \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^* \|^2$.

Observe a convergência quadrática do método de Newton (é de se esperar que para pontos próximos da solução tenhamos:

$$\| \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^* \| \approx \| \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \|.$$

$$E_1 = \| \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 \| = 0.25 \approx 2 \times 10^{-1}$$
$$E_2 = \| \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \| = 0.025 \approx 2 \times 10^{-2}$$
$$E_3 = \| \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2 \| = 0.000255 \approx 2 \times 10^{-4}$$

O que esperar de E_4? Com o número de algarismos significativos usados, faz sentido mais uma iteração?

Exercício 1:

Resolver o sistema não-linear a seguir, pelo Método de Newton.

$$\begin{cases} 3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 4 = 0 \\ x_1^2 + x_1 x_2^3 - 9 = 0 \end{cases}$$

Ponto inicial: $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Considere:

tolerância $\varepsilon = 10^{-3}$

número máximo de iterações = 4

Exercício 2:

Resolver o sistema não-linear a seguir, pelo Método de Newton.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

Ponto inicial: $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

Solução: $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0,7852 \\ 0,4966 \\ 0,3699 \end{pmatrix}$

Faça somente uma iteração e determine $\mathbf{x}^1$.
Calcule $\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|$, $\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^*\|$ e comente sobre a expectativa de convergência
Quantas iterações a mais você espera que haja convergência com $\varepsilon = 10^{-4}$?