ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – 2015/2

$1^{\underline{a}}$ lista de exercícios

1. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$. Prove que $L_1 = L_2$.

2. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Prove que

   (a) $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada e

   (b) toda subsequência $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ de $(a_n)_{n\geq 1}$ converge para L.

3. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.
   Vale a recíproca deste resultado?

4. Suponha que $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Considere a sequência $(b_n)_{n\geq 1}$ definida por $b_n = \min(|a_1|, \ldots, |a_n|)$, $n \geq 1$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

5. Para cada n, $n \geq 1$, considere $a_n \in [0, 1]$. Se $(b_n)_{n\geq 1}$ e $(c_n)_{n\geq 1}$ são sequências de números reais tais que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$, prove que $\big(a_n b_n + (1 - a_n)c_n\big)_{n\geq 1}$ converge para b.

6. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências de números reais tais e $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que

   (a) se $a \neq 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a} = 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

   (b) se $a \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = b$ com $a_n \neq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{b}{a}$ e

   (c) se $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = b$ com $b_n \neq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{a}{b}$.

7. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências de números reais limitadas. Prove que

   (a) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$,

   (b) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$,

   (c) $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$,

   (d) $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$,

   (e) se $c \geq 0$, então $\liminf(ca_n) = c \liminf a_n$ e $\limsup(ca_n) = c \limsup a_n$ e

   (f) se $a_n \leq b_n$, para todo $n \geq 1$, então $\liminf a_n \leq \liminf b_n$ e $\limsup a_n \leq \limsup b_n$.

8. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais não negativos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.
   Sugestão. $\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \dfrac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$, $n \geq 1$.

9. Suponha que $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais limitada. Prove que

   (a) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$,

   (b) se $\liminf a_n = \limsup a_n$, então existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$ e

   (c) se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe, então $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.