Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares
Introdução

Material Elaborado por: Alysson Machado Costa (SME/ICMC/USP)

Por que resolver sistemas lineares ?

- Em diversas situações práticas, necessitamos resolver sistemas de equações lineares, da forma:

$$
\begin{cases}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \\
a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

- Exemplos:
  - cálculo do potencial em redes elétricas,
  - cálculo da razão de escoamento em sistemas hidráulicos,
  - previsão da concentração de reagentes em reações químicas simultâneas...

Mini exemplo

- Mede-se a velocidade de um corpo acelerado e obtêm-se os seguintes valores:

$t = 5$, $v = 106.8$ m/s

$t = 8$, $v = 177.2$ m/s

$t = 12$, $v = 279.2$ m/s

Sabendo que a velocidade é dada por $v(t) = at^2 + bt + c$

Calcule os valores de a, b e c.

Mini exemplo

t = 5, v = 106.8 m/s - 106.8 = 25a + 5b + c

t = 8, v = 177.2 m/s - 177.2 = 64a + 8b + c

t = 12, v = 279.2 m/s - 279.2 = 144a + 12b + c

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Mini exemplo

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

- Neste caso, sabemos que há uma solução. Mas nem sempre é o caso.

Classificação de um sistema linear

- **Possível e consistente**: todo sistema que possui ao menos uma solução.
  - Determinado: a solução é única.
  - Indeterminado: há mais de uma solução.

- **Impossível ou inconsistente:** todo sistema que não admite solução.

Exemplos de sistemas lineares

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

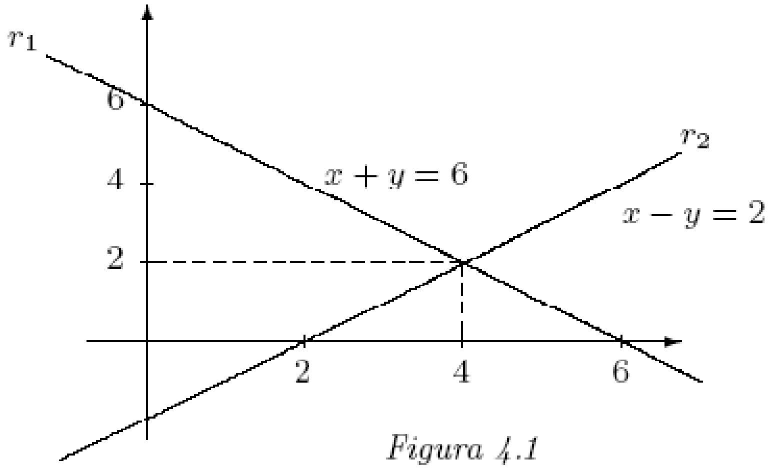

Figura 4.1

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

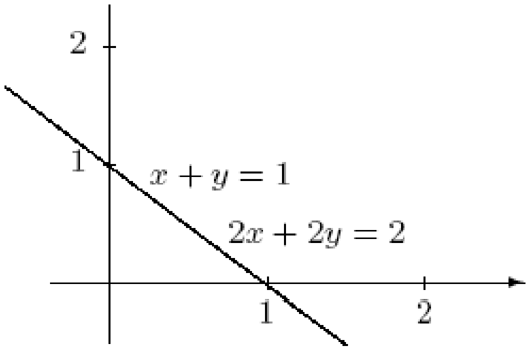

Figura 4.2

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

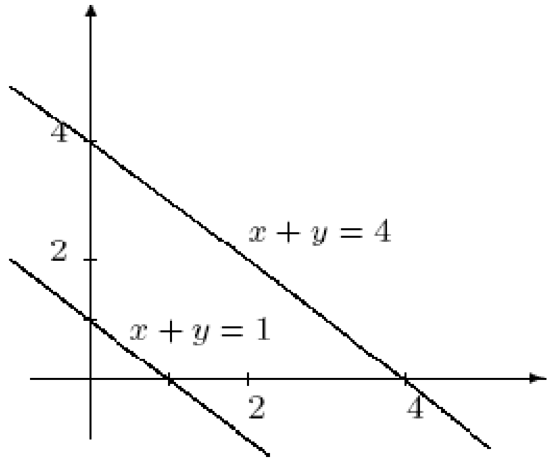

Figura 4.3

Sistemas possíveis e indeterminados

- Qual a característica de um sistema indeterminado ?

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \quad * 2$$

- A linha 2 é igual à linha 1 multiplicada por um escalar.
- No caso geral:

  Uma linha é combinação linear de outras linhas.

  det(A)=0.

Sistemas inconsistentes

- Qual a característica de um sistema inconsistente ?

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y & & = 6 \\ x + y & & = 4 \end{array}\right. \qquad *1 \qquad * 2/3$$

- *A* linha 2 (coeficientes) é igual à linha 1 multiplicada por um escalar. *O* coeficiente b_2 é igual a b_1 multiplicado por um outro escalar.
- Uma linha (coeficientes) é combinação linear de outras linhas, mas a combinação diverge para o vetor *b*.
- det(*A*)=0.

Sistemas possíveis e determinados

- $\det(A) \neq 0$.
- A matriz A é invertível

Em forma matricial:

$$A\,x = b \quad (\det(A) \neq 0)$$

Então a solução do sistema é determinada por:

$$x = A^{-1}b \quad \text{(Necessita inverter a matriz } A\text{)}$$