6.a Lista de Exercícios de SMA304 - Álgebra Linear

Exercício 1. Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação as bases canônicas dos respectivos espaços vetoriais envolvidos.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y, z) \doteq (x + y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x, y, z, t) \doteq 2x + y - z + 3t$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x) \doteq (x, 2x, 3x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Considere

$$M \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinar a matriz do operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dado por $T(X) \doteq MX - XM$, $X \in M_2(\mathbb{R})$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operador linear cuja matriz em relação à base $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0), (1, 4)\}$ é $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 4. Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ transformação linear definida por

$$T(p) \doteq \int_{-1}^{1} p(t)\, dt, \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}$, nos seguintes casos:

(a) $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{1\}$, onde

$$p_o(t) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq t, \quad p_2(t) \doteq t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) $\mathcal{B} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{-2\}$, onde

$$q_o(t) \doteq 1, \quad q_1(t) \doteq 1 + t, \quad q_2(t) \doteq 1 + t + t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5. Se a matriz de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação a base canônica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e se $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dado por $S \doteq I + T + 2T^2$, onde I é o operador identidade em $\mathbb{R}^3$, determinar a matriz do operador linear S em relação à base canônica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Encontre também umaa expressão $S(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 6. Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por

$$(T(p))(t) \doteq p(t) - p(1), \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Se $\mathcal{B} \doteq \left\{1, t - 1, (t - 1)^2\right\}$ e $\mathcal{C} \doteq \left\{1, t, t^2\right\}$ são bases de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, encontrar $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$.

Exercício 7. Seja $\mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Se $T, S : V \to V$ são operadores lineares em V tais que

$$\begin{aligned} T(e_1) &\doteq 2e_1 - 3e_2 + e_3 & \qquad S(e_1) &\doteq 3e_1 + 2e_2 \\ T(e_2) &\doteq e_1 + e_2 & S(e_2) &\doteq e_1 - e_2 - e_3 \\ T(e_3) &\doteq e_2 + e_3 & S(e_3) &\doteq e_1 + e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$

Determine as seguintes matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}$, $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$, $[S^2 + I]_{\mathcal{B}}$ e $[T^3 - S^2]_{\mathcal{B}}$.

Exercício 8. Sejam $U \doteq \mathbb{R}^3$, $V \doteq \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} \doteq \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{(1,0),\ \ (0,1)\}$ bases dos espaços vetoriais U e V, respectivamente. Encontrar, em cada um dos itens abaixo, $T \in \mathcal{L}(U,V)$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}}$ seja a matriz;

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercício 9. Seja $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, que tem como base canônica a base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, b+c), \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

(a) Encontre a matriz $[T]_{\mathcal{AB}}$, onde $\mathcal{A}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear tal que $[S]_{\mathcal{AB}} \doteq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, encontre uma expressão para $S(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, determine $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $S(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $[T]_{\mathcal{A}} \doteq \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{A}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Determine todos os vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = u$ e $T(v) = -v$.

Exercício 11. Sejam $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e T o operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$T(v) \doteq A[v]_{\mathcal{A}}, \quad v \in \mathbb{R}^2,$$

onde $[v]_{\mathcal{A}}$ denota a matriz das coordenadas do vetor $\underline{v}$ em relação à base canônica $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz do operador T em cada uma das bases de $\mathbb{R}^2$ seguintes:

(a) $\mathcal{B}_1 \doteq \{\,(1,0),(0,1)\,\}$.
(b) $\mathcal{B}_2 \doteq \{\,(1,3),(2,5)\,\}$

Exercício 12. Mostre que as transformações em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dadas por

$$T(x,y) \doteq (x, 2y), \quad S(x,y) \doteq (y, x+y) \quad \text{e} \quad L(x,y) \doteq (0,x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

formam um conjunto L.I. em $L(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 13. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por

$$T(x,y,z) \doteq (x+z, y-2z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{(1,2,1),\,(0,1,1)\,(0,3,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{C} \doteq \{(1,5),(2,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Exercício 14. Em cada um dos itens abaixo, determine as matrizes das seguintes transformações lineares em relações às bases canônicas dos respectivos espaços:

(a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, dada por $T(x,y,z) \doteq (x+y, z)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, dada por $T(x,y) \doteq (x+y, x, x-y)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, dada por $T(x,y,z,t) \doteq 2x+y-z+3t$, $\quad (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
(d) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, dada por $T(x) \doteq (x, 2x, 3x)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 15. Sejam $M \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $T \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ dada por

$$T(X) \doteq MX - XM, \quad X \in M_2(\mathbb{R})$$

e $\mathcal{C}$ a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$. Determine $[T]_{\mathcal{C}}$.

Exercício 16. Determine $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B} = \{(1,2),(0,5)\}$ é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercício 17. Seja $T \in \mathcal{L}(P_3(\mathbb{R}), P_2(\mathbb{R}))$ definida por $T(p) = p'$, $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Determine a matriz de T em relaçõa às bases $\mathcal{A} \doteq \{p_o, p_1, p_2, p_3\}$ e $\mathcal{B} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$, respectivamente, onde

$$p_o(t) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq t, \quad p_2(t) \doteq t^2, \quad p_3(t) \doteq t^3, \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$q_o(t) \doteq 1, \quad q_1(t) \doteq 1 + t, \quad q_2(t) \doteq -1 + t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 18. Seja $\mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Considere T, $S \in \mathcal{L}(V)$ dadas por

$$T(e_1) = e_1 - e_2, \quad T(e_2) = e_1 + e_3, \quad T(e_3) = e_2,$$

e

$$S(e_1) = 2e_1 + e_3, \quad S(e_2) = e_1, \quad S(e_3) = e_2 - 3e_1.$$

Determine as matrizes, em relação à base $\mathcal{B}$, dos seguintes operadores lineares:

$$T, \quad S, \quad 3T - 5S, \quad T \circ S \circ T, \quad T^2 + S^2, \quad T^{-1} \text{ (caso exista)}\,, \quad (T \circ S)^{-1} \text{ (caso exista)}.$$

Exercício 19. Verifique se os operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ abaixo são isomorfismos e em caso afirmativo determinar o isomorfismo inverso.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) \doteq (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y,z) \doteq (x, x - y, 2x + y - z)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 20. Considere o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,0) \doteq (1,1,1), \quad T(0,0,1) \doteq (1,0,1), \quad T(0,1,2) \doteq (0,0,4).$$

Pergunta-se: T é um isomorfismo? Em caso afirmativo, obtenha o isomorfismo inverso.

Exercício 21. Dizer se cada um dos seguintes operadores lineares de $\mathbb{R}^3$ é inversível. Quando o for, determine o isomorfismo inverso.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por $T(x,y,z) \doteq (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$, $\quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, operador linear tal que

$$T(1,0,0) \doteq (1,1,1), \quad T(0,1,0) \doteq (1,0,1) \quad \text{e} \quad T(0,1,2) \doteq (0,0,4).$$

Exercício 22. Mostre que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$. Exiba um isomorfismo.

Exercício 23. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais U e V são isomorfos, justificando a resposta.

(a) $U \doteq \mathbb{R}^2$, $V \doteq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z = 0\right\}$.
(b) $U \doteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $V \doteq \{p \in \mathscr{P}_4(\mathbb{R}) \,;\, p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
(c) $U \doteq \mathbb{R}^3$, $V \doteq \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) \,;\, A^t = A\right\}$.
(d) $U \doteq \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}\right\}$, $V \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \,;\, p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 24. Mostre que o subespaço $W \doteq \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x - y = z - 2t = 0\}$ é isomorfo ao subespaço $U \doteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x - y - z = 0\}$ e exiba um isomorfismo entre estes subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.