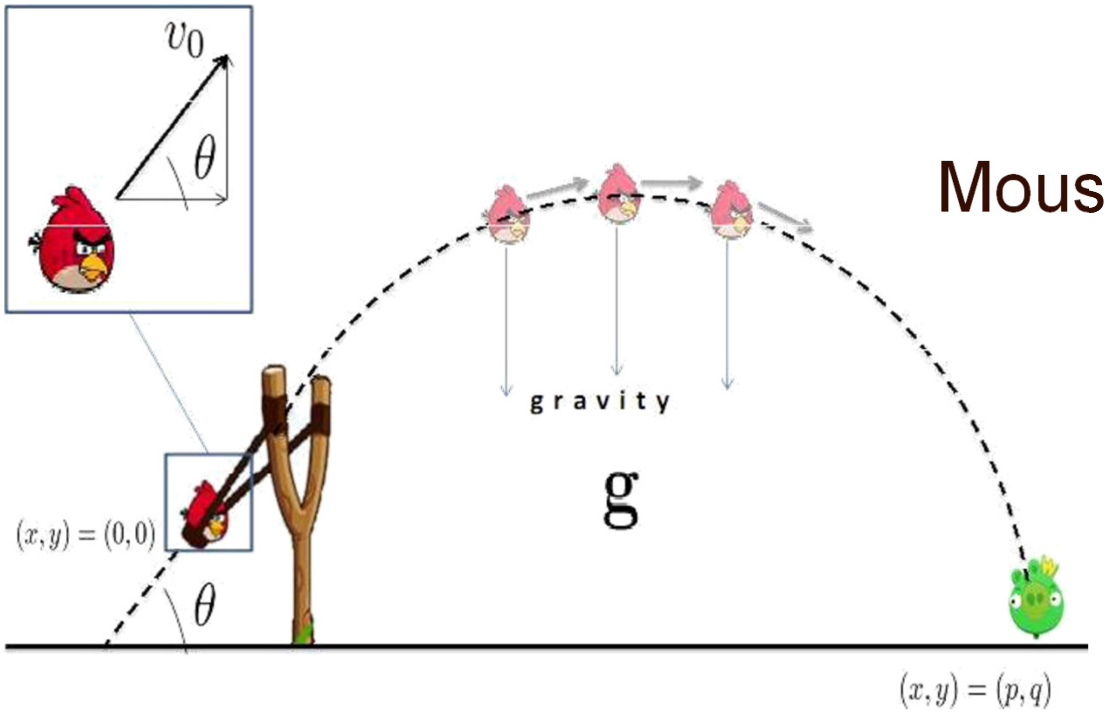
# Trajetórias de objetos: Modelos



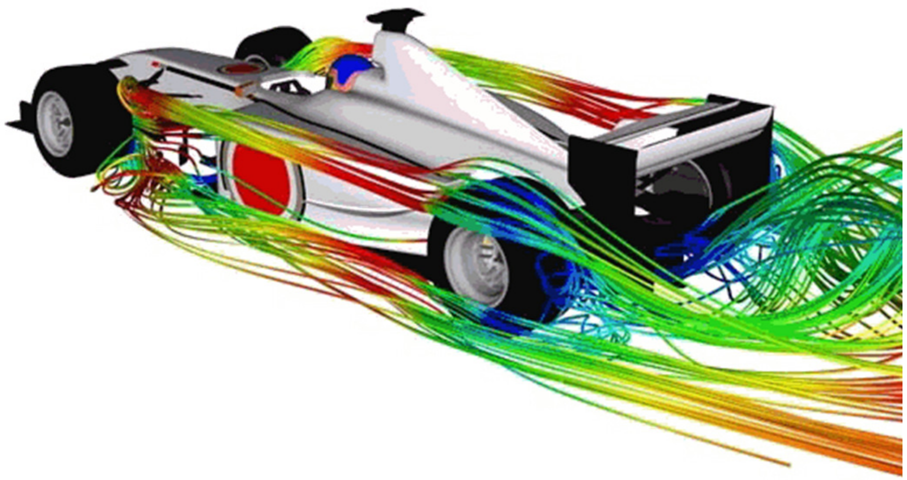

Moussa Reda Mansour

# Lembranças ...

- A aceleração translacional de um objeto é definida aplicando a segunda **Lei de Newton** ($F = ma$)
- A **velocidade** translacional $v$ e **localização** $s$ de um objeto são determinador por:
  - $\frac{dv}{dt} = a$ e $\frac{ds}{dt} = v$
- A **modelagem** é realizada para as **3 componentes** (x, y, z) de maneira **independente**

# Arrasto Aerodinâmico: fundamentos

- Força que **resiste** ao movimento de um objeto através de um meio **fluido** (líquido ou gás)
- A força **age** de maneira **oposta** à velocidade do objeto
- A análise é realizada em relação a duas forças:
  - Forças de **Pressão**
  - Forças de **Fricção**



# Arrasto Aerodinâmico: fundamentos

- Força de Pressão

  *"A pressão na frente da superfície de um objeto viajando através de um fluído é muito maior que a pressão atrás do mesmo"*

- Força de Fricção

  *"Força que resiste ao movimento entre duas superfícies em contato"*

# Arrasto Aerodinâmico: fundamentos

- Força de Arrasto de um Objeto

$$F_D = F_{D,p} + F_{D,f}$$

**Outros componentes que fazem parte da Força de Arrasto não serão modelados neste curso.**

$$F_D = \text{força de arrasto}$$
$$F_{D,p} = \text{Força de Pressão}$$
$$F_{D,f} = \text{Força de Fricção}$$

# Arrasto Aerodinâmico: fundamentos

- A magnitude em que a força de arrasto age sobre um objeto é dada por:
  - Geometria do objeto
  - Densidade do Fluído no qual o objeto viaja
  - Magnitude da velocidade do objeto
  - Coeficiente de arrasto (ou coeficiente de resistência aerodinâmica)

# Arrasto Aerodinâmico: fundamentos

**Densidade do Fluído**

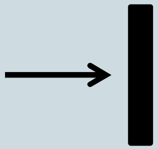
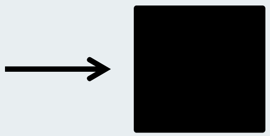
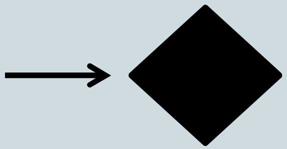
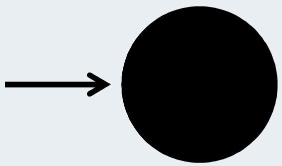
**Área do Objeto**

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 A C_d$$

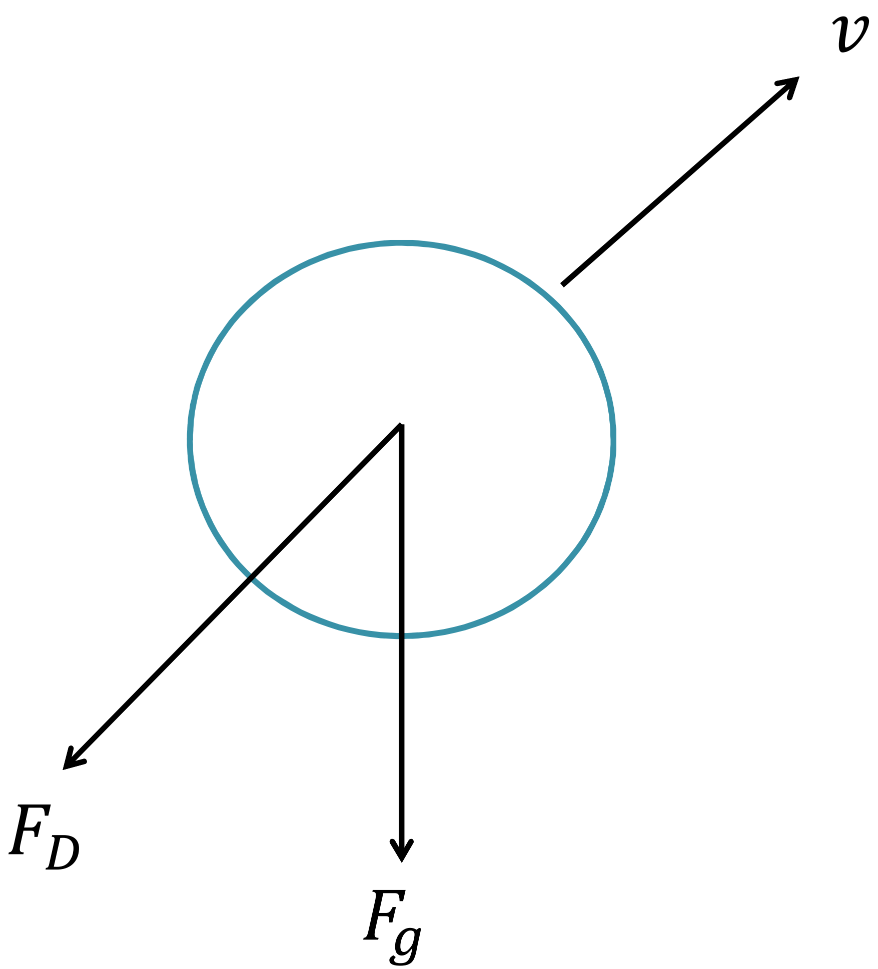
**Magnitude da Velocidade**

**Coeficiente de Arrasto**

# Arrasto Aerodinâmico: fundamentos

| Figura | $C_D\ (2D)$ | $C_D\ (3D)$ |
|---|---|---|
|  | 1,17 | 2 |
|  | 1,05-1,07 | 2,1 |
|  | 0,86-0,81 | 1,6 |
|  | 0,4-0,47 | 1,2 |

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico



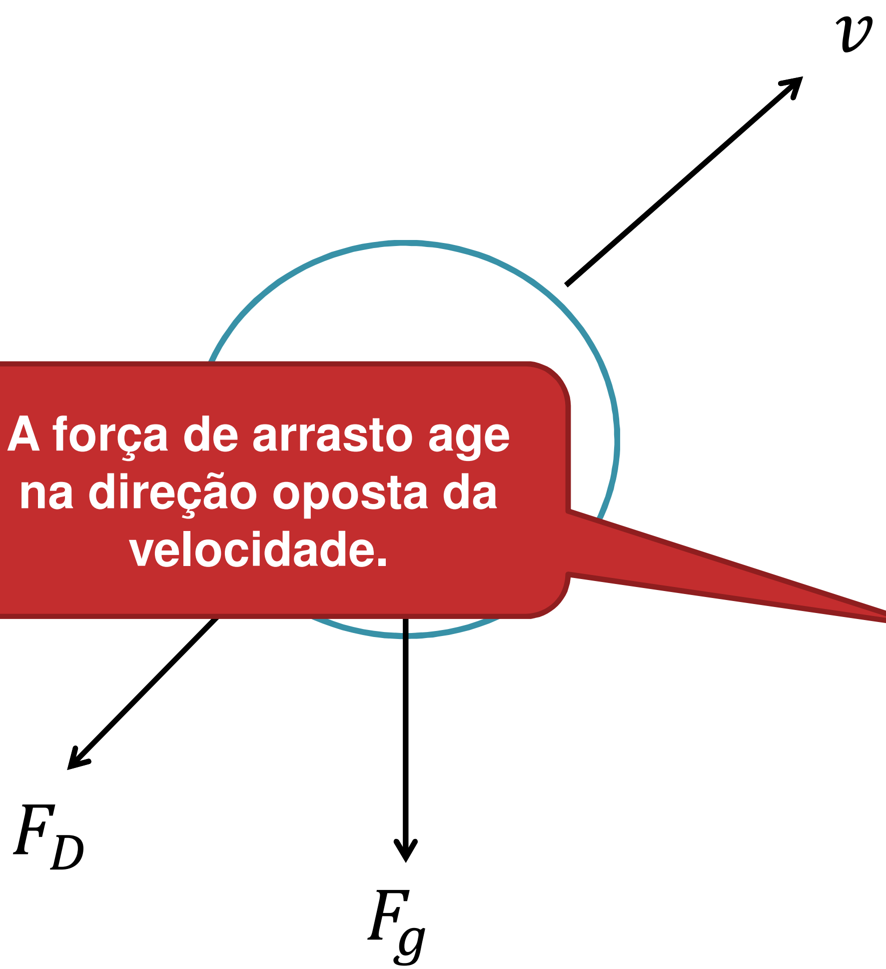

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$F_{Dx} = -F_D \frac{v_x}{v}$$

$$F_{Dy} = -F_D \frac{v_y}{v}$$

$$F_{Dz} = -F_D \frac{v_z}{v}$$

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico




**A força de arrasto age na direção oposta da velocidade.**

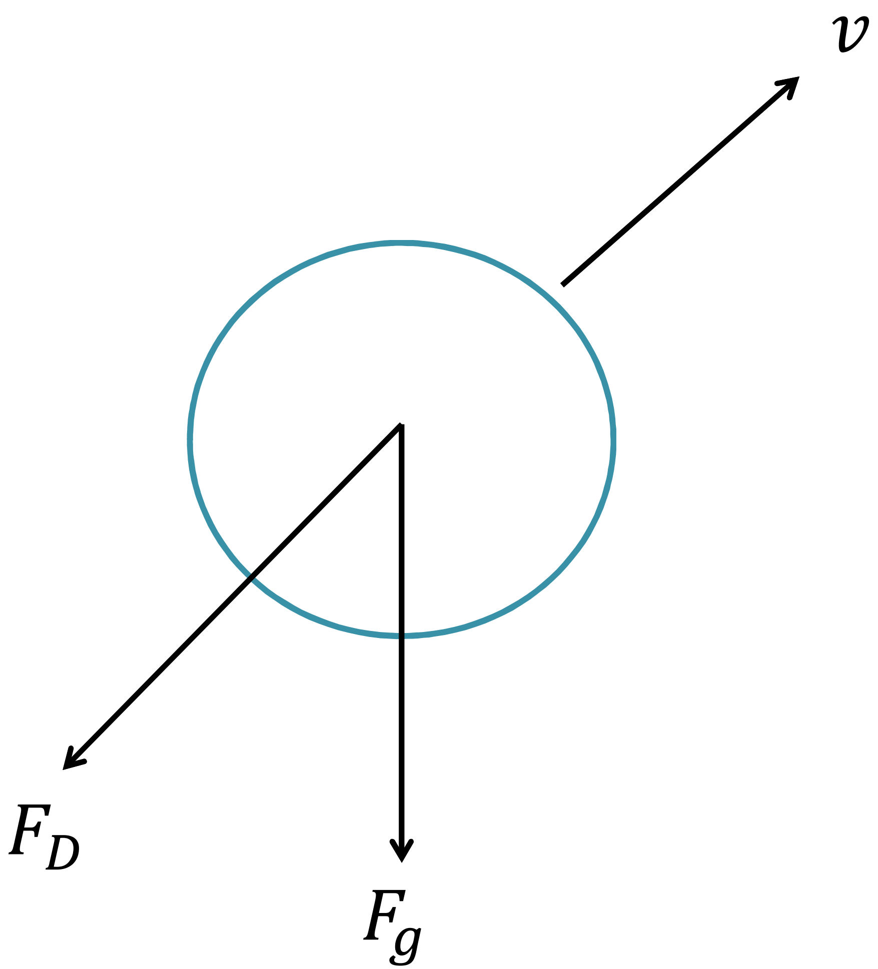
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$F_{Dx} = -F_D \frac{v_x}{v}$$

$$F_{Dy} = -F_D \frac{v_y}{v}$$

$$F_{Dz} = -F_D \frac{v_z}{v}$$

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico



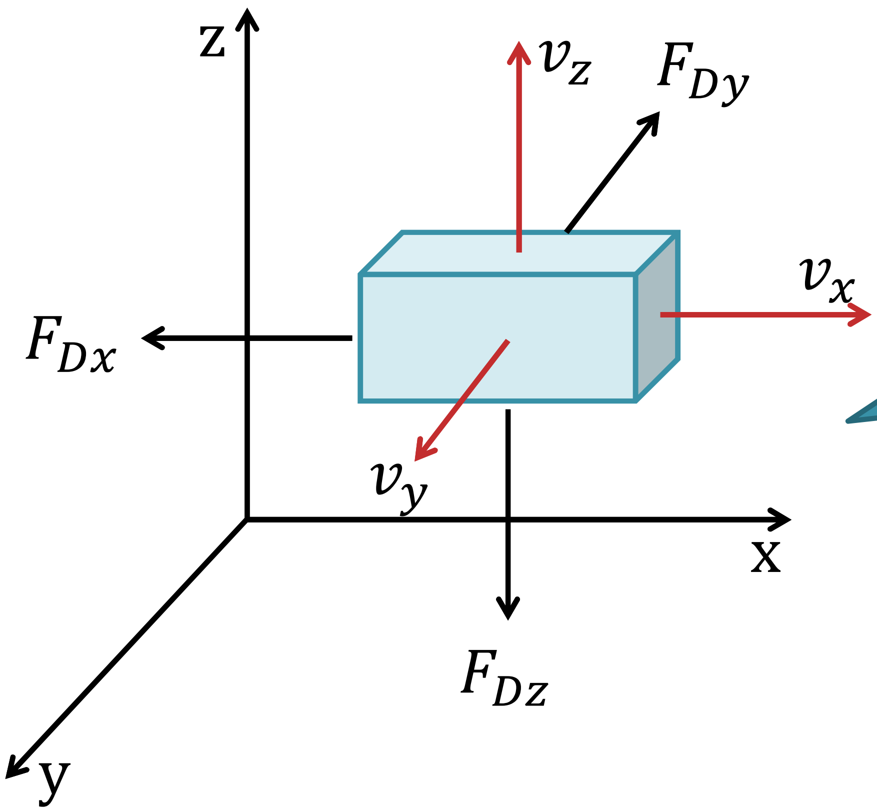

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$F_{Dx} = -F_D \frac{v_x}{v}$$

$$F_{Dy} = -F_D \frac{v_y}{v}$$

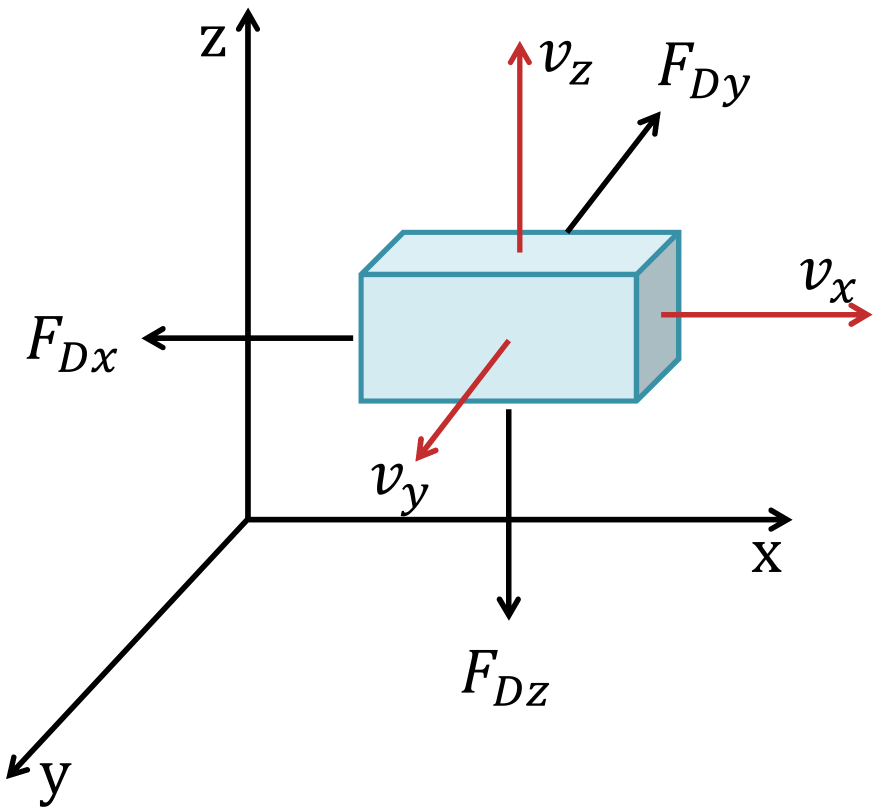
$$F_{Dz} = -F_D \frac{v_z}{v}$$

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico




Têm a força da gravidade de cada componente também

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico




$$\begin{cases} F_x = -F_D \dfrac{v_x}{v} \\ F_y = -F_D \dfrac{v_y}{v} \\ F_z = -mg - F_D \dfrac{v_z}{v} \end{cases}$$

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico

$$\begin{cases} F_x = -F_D \dfrac{v_x}{v} \\ F_y = -F_D \dfrac{v_y}{v} \\ F_z = -mg - F_D \dfrac{v_z}{v} \end{cases}$$

**Observe que agora as forças nas componentes x e y não são mais nulas, e sim proporcionais à velocidade das componentes e á força de arrasto.**

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico

- Velocidade do objeto:

*“Relação entre o deslocamento de um objeto em determinado tempo”*

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \begin{cases} a_x = -\frac{F_D v_x}{mv} \\ a_y = -\frac{F_D v_y}{mv} \\ a_z = -g - \frac{F_D v_z}{mv} \end{cases}$$

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico

**É praticamente impossível encontrar um sistemas algébrico!!!**

to:

*em determinado te*

**A derivada de $v_x$ em relação ao tempo é em função de $v_x$ e da magnitude magnitude de $v$**

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \begin{cases} a_x = -\dfrac{F_D v_x}{mv} \\ a_y = -\dfrac{F_D v_y}{mv} \\ a_z = -g - \dfrac{F_D v_z}{mv} \end{cases}$$

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico

- Localização do objeto:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico

eto:

**Novamente, é praticamente impossível encontrar um sistemas algébrico!!!**

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{s}}{dt} \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

**Métodos de Integração Numérica**

# Arrasto Aerodinâmico: modelo físico

- Conjunto de EDO's:

$$\text{Velocidade}\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{F_D v_x}{mv} \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{F_D v_y}{mv} \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g - \dfrac{F_D v_z}{mv} \end{cases}$$

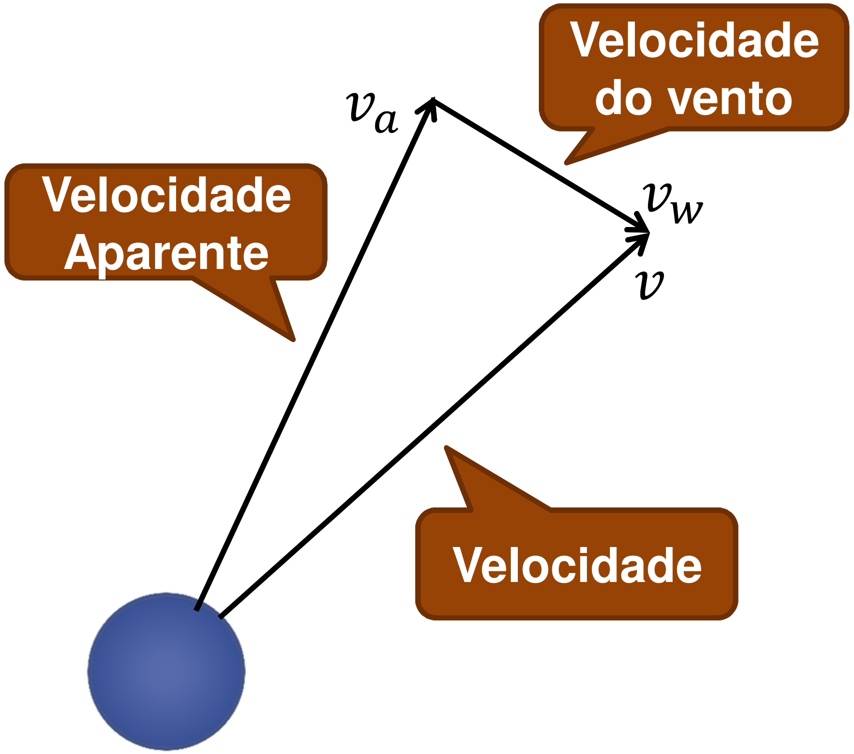
$$\text{Localização}\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dz}{dt} = v_z \end{cases}$$

# Efeito do Vento: fundamentos

- **Mudança** da trajetória de um objeto

  devido ao **vento**
- Simplificação necessária:
  - Considera-se o efeito do vento apenas nos componentes x e y

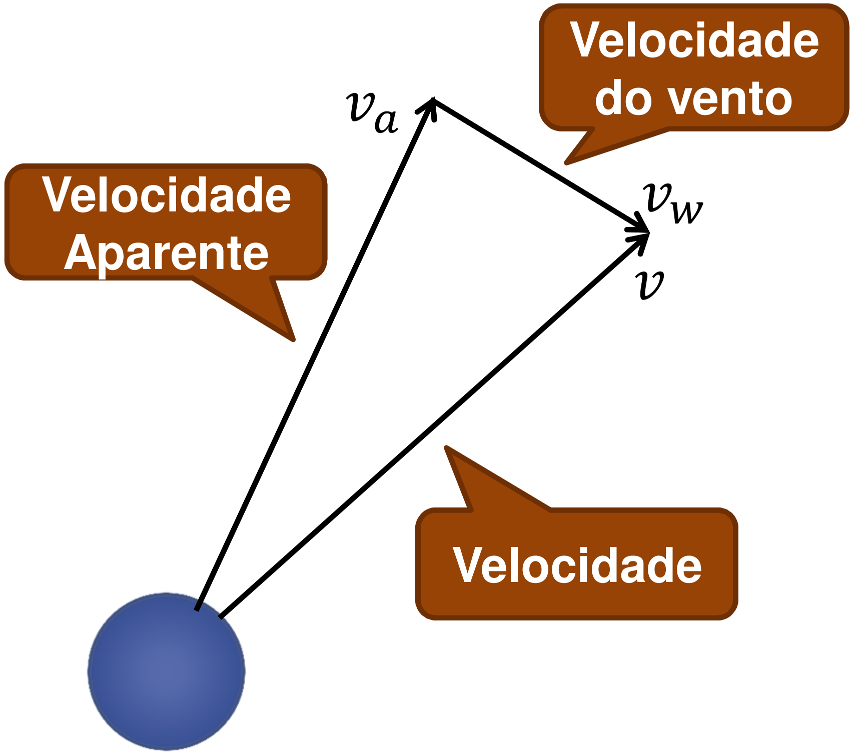
# Efeito do Vento: modelo físico




$$v_{ax} = v_x - v_{wx}$$
$$v_{ay} = v_y - v_{wy}$$

$$v_{az} = v_x$$

# Efeito do Vento: modelo físico



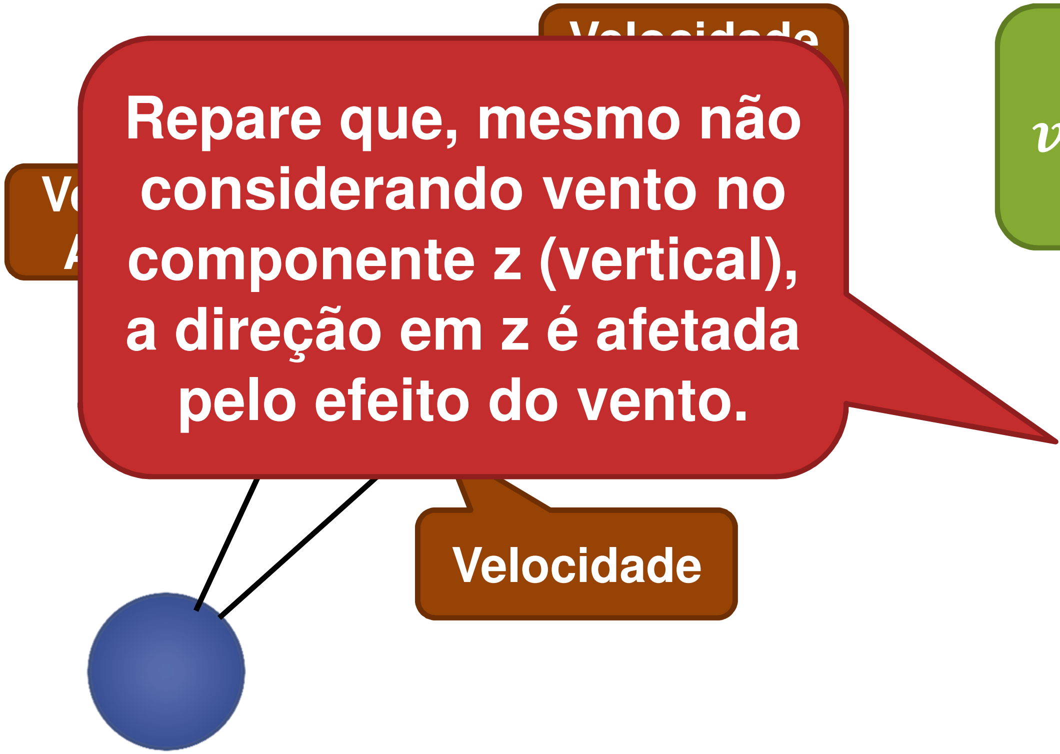

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2}$$

$$F_{Dx} = -F_D \frac{v_{ax}}{v_a}$$

$$F_{Dy} = -F_D \frac{v_{ay}}{v_a}$$

$$F_{Dz} = -F_D \frac{v_{az}}{v_a}$$

# Efeito do Vento: modelo físico




$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2}$$

$$F_{Dx} = -F_D \frac{v_{ax}}{v_a}$$

$$F_{Dy} = -F_D \frac{v_{ay}}{v_a}$$

$$F_{Dz} = -F_D \frac{v_{az}}{v_a}$$

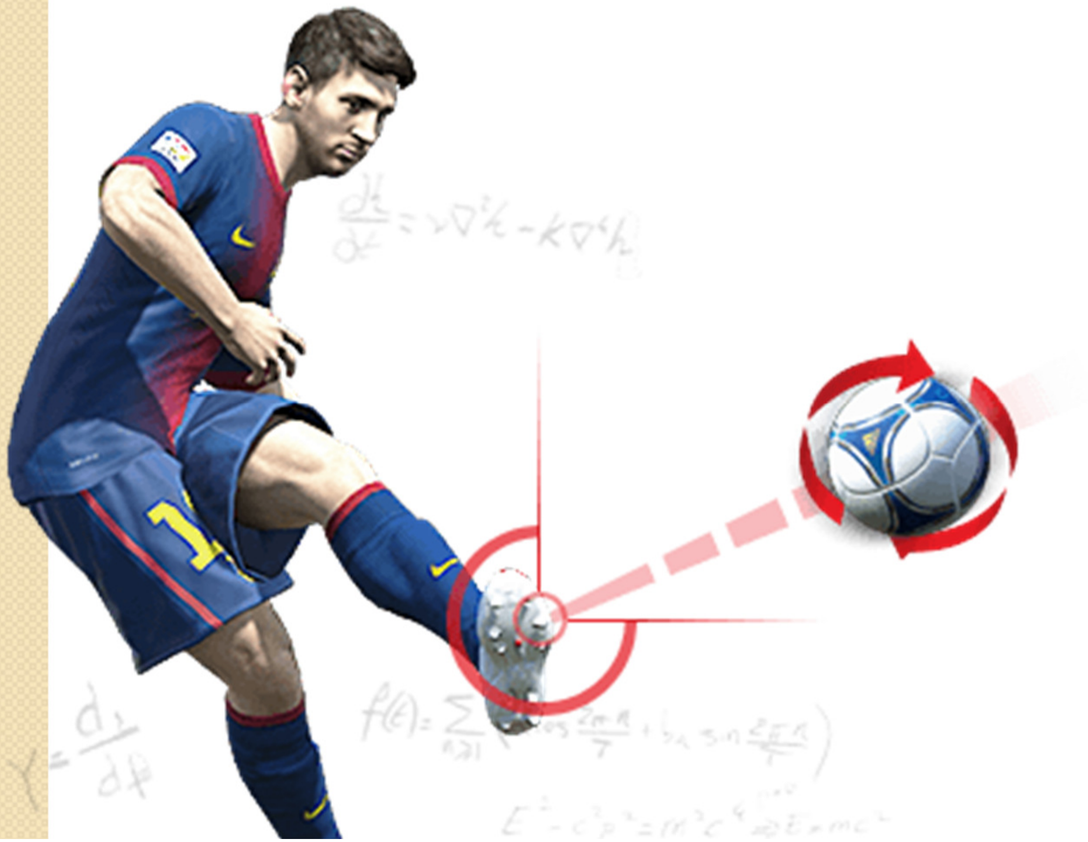
# Efeito do Vento: modelo físico

- Conjunto de EDO's:

$$\text{Velocidade}\begin{cases} \dfrac{dv_{ax}}{dt} = -\dfrac{F_D v_{ax}}{m v_a} \\ \dfrac{dv_{ay}}{dt} = -\dfrac{F_D v_{ay}}{m v_a} \\ \dfrac{dv_{az}}{dt} = -g - \dfrac{F_D v_{az}}{m v_a} \end{cases}$$

$$\text{Localização}\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dz}{dt} = v_z \end{cases}$$

# Efeito da Rotação: fundamentos



# Efeito da Rotação: fundamentos

- É muito comum objetos apresentarem alguma **rotação** quando "viajam" através de algum **fluído**

# Efeito da Rotação: fundamentos

- Equação de Bernoulli

*"Descreve o comportamento de um fluido que se move ao longo de um tubo ou conduto"*

$$constante = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$$

# Efeito da Rotação: fundamentos

- Equação de Bernoulli

Aceleração Gravitacional

Altitude

$$constante = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$$

pressão

Velocidade

Densidade do Fluido

# Efeito da Rotação: fundamentos

- Equação de Bernoulli

*"... se a altitude é constante e a velocidade do fluido aumenta, então ocorre uma diminuição da pressão"*

# Efeito da Rotação: fundamentos

**A rotação na bola irá aumentar a velocidade do fluido no topo da superfície …**


**… e a velocidade do fluido na parte de baixo da superfície da bola irá diminuir.**

**$\omega$ é velocidade angular**

# Efeito da Rotação: fundamentos

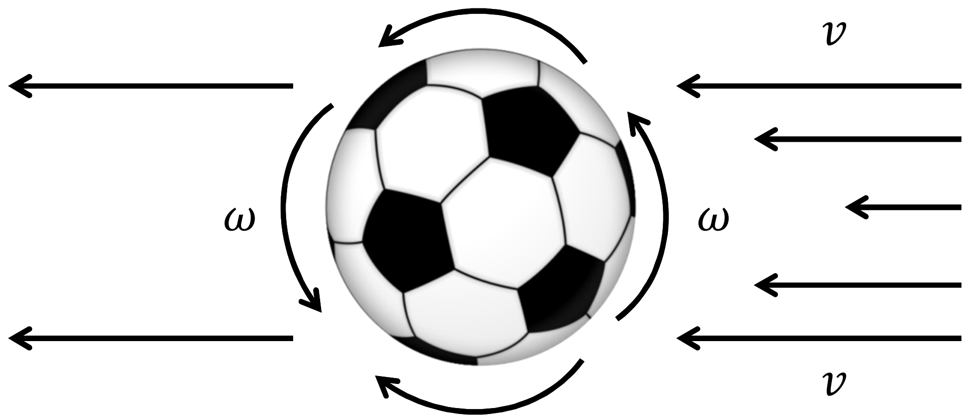
**Pelo fato da velocidade do fluido no topo da bola ser maior que o de baixo …**

**… de acordo com a equação de Berllouni …**


**… a pressão no topo da superfície da bola será menor que em baixo dela, gerando uma força de sustentação positiva.**

# Efeito da Rotação: fundamentos

**A diferença de pressão irá gerar uma força de sustentação positiva.**



# Efeito da Rotação: fundamentos

- Efeito de rotação gerando sustentação é conhecido como efeito **Magnus**

*"Fenômeno pelo qual a **rotação** de um objeto **altera** sua trajetória em um fluido"*

$$F_M = \frac{1}{2}\rho v^2 A C_L$$

# Efeito da Rotação: fundamentos

**Densidade do Fluído**

**Área do Objeto**

$$F_M = \frac{1}{2}\rho v^2 A C_L$$

**Magnitude da Velocidade**

**Coeficiente de Sustentação**

# Efeito da Rotação: fundamentos

- Determinar o **coeficiente de sustentação** para um objeto arbitrário é um problema **difícil**
- Adota-se na modelagem figuras geométricas simples

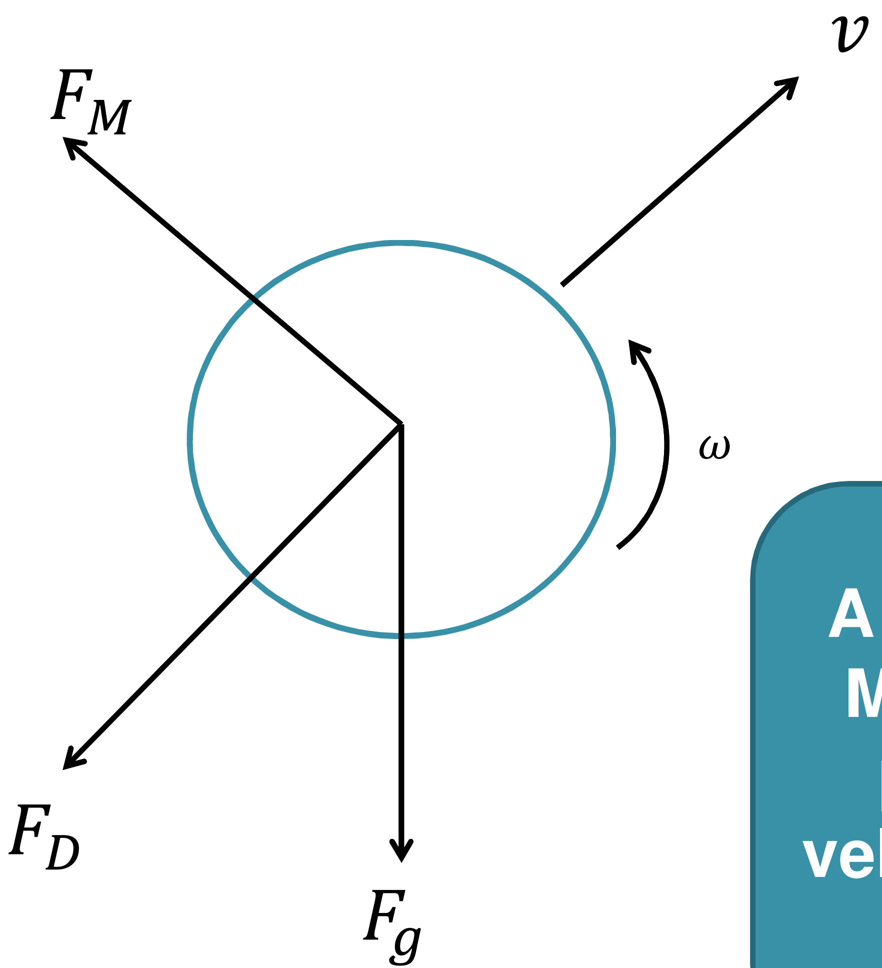
# Efeito da Rotação: fundamentos

- Coeficiente de sustentação de uma esfera é dado por:

$$C_L = \frac{r\omega}{v}$$

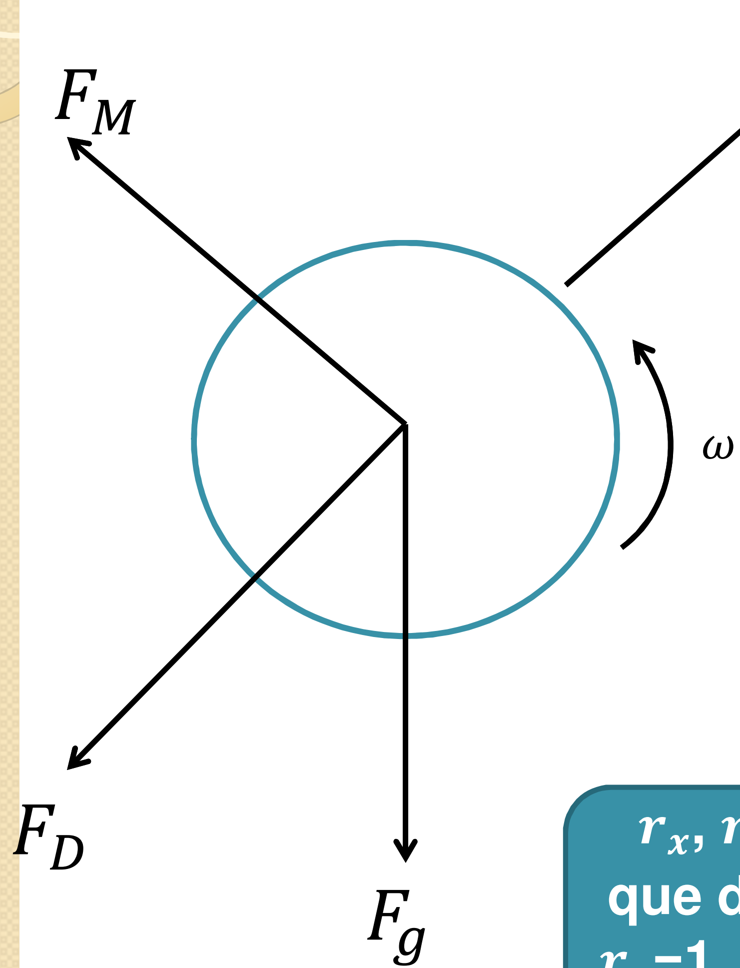
**$r$ é o raio da esfera**

# Efeito da Rotação: modelo físico




**A direção da Força Magnus é sempre perpendicular à velocidade e ao eixo de rotação.**

# Efeito da Rotação: modelo físico




$$\begin{cases} F_{Mx} = F_M\left(\dfrac{v_y}{v}r_z - \dfrac{v_z}{v}r_y\right) \\ F_{My} = F_M\left(\dfrac{v_x}{v}r_z - \dfrac{v_z}{v}r_x\right) \\ F_{Mz} = F_M\left(\dfrac{v_x}{v}r_y - \dfrac{v_y}{v}r_x\right) \end{cases}$$

**$r_x$, $r_y$ e $r_z$ compoem um vetor unitário que definem o eixo de rotação, isto é, se $r_x$=1, significa que o objeto está rodando apenas em relação ao eixo x.**

# Efeito da Rotação: modelo físico

- Conjunto de EDO's:

$$\text{Velocidade}\begin{cases}\dfrac{dv_{ax}}{dt}=\dfrac{F_{Dx}+F_{Mx}}{m}\\[2mm]\dfrac{dv_{ay}}{dt}=\dfrac{F_{Dy}+F_{My}}{m}\\[2mm]\dfrac{dv_{az}}{dt}=g+\dfrac{F_{Dz}+F_{Mz}}{m}\end{cases}$$

$$\text{Localização}\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v_x\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=v_y\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=v_z\end{cases}$$