

2.^a Prova de SMA333

Nome: _____

No. USP: _____

08/07/14

Questões	Notas	Valores
1. ^a		2,0
2. ^a		2,0
3. ^a		2,0
Total		6,0

1. (a) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Escreva essa função como uma série de Fourier de período 2π que tenha somente termos em senos. Explique como fez e analise a convergência da série.

- (b) Dada uma função $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, considere o problema do calor

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = F(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Mostre como encontrar a solução $u(x, t)$ desse problema utilizando o método de separação de variáveis.

- (c) Encontre a solução $u(x, t)$ para o caso em que $F(x) = f(x)$, $x \in [0, \pi]$, dada no item (a).

2. O deslocamento $u(x, t)$ de uma corda de comprimento L fixada em $x = 0$ e livre em $x = L$ e que é posta em movimento a partir da posição inicial com velocidade nula é governado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Use o método de separação de variáveis para encontrar a solução $u(x, t)$ desse problema.

Dê especial atenção em sua resolução para a extensão de $f(x)$ fora do intervalo $[0, L]$ e sua representação como uma série de Fourier de período $4L$ que tenha somente termos em senos. Explique como fez.

3. (a) Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

na região semicircular $r < a$, $0 < \theta < \pi$, satisfazendo as condições de fronteira

$$\begin{cases} u(r, 0) = 0, & u(r, \pi) = 0, & 0 \leq r < a, \\ u(a, \theta) = f(\theta), & & 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Suponha que $u(r, \theta)$ seja limitada na região dada.

- (b) Encontre a solução se $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$.