USP/ICMC/SMA - Lista de SMA-0333 - CÁLCULO III e SMA-0356 - CÁLCULO IV - Séries de Fourier

1. Verifique se as funções abaixo são pares ou ímpares ou não são nem pares nem ímpares:
   $a)\ f(x) = x$ $\quad b)\ f(x) = x - x^3$ $\quad c)\ f(x) = x + x^2$
   $d)\ f(x) = sen(x^2+1)$ $\quad e)\ f(x) = xcosx,$ $\quad f)\ f(x) = e^{-x^2}$
   $g)\ f(x) = senx + cosx$ $\quad h)\ f(x) = 1 - x^2\ se\ x < 0\ e\ f(x) = 1 + x^2\ se\ x \geq 0$

2. Calcule as integrais abaixo.
   a) $\displaystyle\int sen^2x\ dx.$
   b) $\displaystyle\int x^2sen2x\ dx.$
   c) $\displaystyle\int (1+x)sen2x\ dx.$
   d) $\displaystyle\int_{\pi}^{\pi} (1 + 3x^2 + 5x^8 - 10x^{14})sen2x\ dx.$
   e) $\displaystyle\int e^{2x}sen3x\ dx.$

3. Verifique se as funções abaixo são contínuas por pedaços e se for calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ para
   a) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.
   b) $f(x) = 1 - x + -x|x| + x^2 + 4x^3 - x^7 + 3x^{11} + x^{19}$
   c) $f(x) = \begin{cases} x & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \leq 0 \end{cases}$
   c) $f(x) = \begin{cases} x & se\ \ 0 < x < 1/2 \\ 1/2 & se\ \ x \geq 1/2 \\ -x & se\ \ x \leq 0 \end{cases}$

4. Escreva a fórmula para os coeficientes de Fourier, bem como a série de Fourier, para o caso em que
   a) $f(x)$ é função $2-$periódica e contínua por pedaçós em $[-1, 1]$.
   b) $f(x)$ é $10-$ periódica, par e contínua por pedaços em [-5,5].
   c) $f(x)$ é $4\pi-$ periódica ímpar e contínua por pedaços em $[-2\pi, 2\pi]$.

5. Supondo que as funções abaixo sejam 2π-periódicas, calcule a série de Fourier de cada uma delas :
   $y)f(x) = xsenx$ $\quad z)f(x) = cos^3x$
   $a)f(x) = sen|x|,$ onde $x \in [-\pi, \pi]$ $\quad b)f(x) = x,$ onde $x \in [-\pi, \pi]$
   $c)f(x) = |x|,$ onde $x \in [-\pi, \pi]$ $\quad d)f(x) = senx,$ onde $x \in [-\pi, \pi]$
   $e)f(x) = x^2,$ onde $x \in [-\pi, \pi]$ $\quad f)f(x) = senx + cosx + 0.5\ sen3x, x \in [-\pi, \pi]$
   $g)f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 0, & \text{se } x \in [0, \pi]; \end{cases}$ $\quad h)f(x) = \begin{cases} senx, & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 0, & \text{se } x \in [0, \pi]; \end{cases}$
   $i)f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ x, & \text{se } x \in [0, \pi]; \end{cases}$ $\quad j)f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 1, & \text{se } x \in [0, \pi]; \end{cases}$
   $k)f(x) = 1 + 3x - x^2,$ se $x \in [0, \pi]$ existe um modo "simples" para o cálculo

6. Para cada função do exercício anterior diga para onde convergem as séries de Fourier encontradas, quando $x = -\pi,\ 0,\ \pi/3,\ \pi/2,\ \pi, 17.2\pi, 18.3\pi, -152.1\pi, -733.7\pi$. Sugestão: Esboce o gráfico de cada uma delas, demarcando os pontos de descontinuidade, se eles existirem.

7. a) Dada a função $f(x) = 2 - x,\ \ 0 < x < 2$, encontre uma função cuja série de Fourier em *senos* convirja para $f(x)$ para todo $x \in]0, 2[$.
   b) Dada a função $f(x) = 2 - x,\ \ 0 < x < 2$, encontre uma função cuja série de Fourier em *cossenos* convirja para $f(x)$ para todo $x \in]0, 2[$.

8. Seja $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$. Encontre uma série de Fourier envolvendo senos e cossenos, que convirja para $f(x) = x$, para todo $x \in [0, \pi]$.(Pense numa extensão apropriada de f.)

9. Seja $f(x)$ função $2\pi-$periódica dada por $f(x) = \quad \pi - x \quad \text{se } x \in (-\pi, \pi)$.

   a) Mostre que sua série de Fourier é dada por $S_f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n sen\, nx}{n}$.

   b) Use o item a) para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

10. Seja $f(x)$ função $2\pi-$periódica dada por $f(x) = \quad |x| \quad \text{se } x \in (-\pi, \pi)$.

    a) Mostre que sua série de Fourier é dada por $S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}cos(2n-1)x$.

    b) Use o item a) para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

11. a) Lembrando que o conjunto $\mathcal{B} = \{1, cos\frac{n\pi x}{L},\ sen\frac{n\pi x}{L};\ n = 1, 2, \ldots\}$ é um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[-\pi, \pi]$ conclua que se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\frac{n\pi x}{L} \qquad \text{então} \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx.$$

    b) Mostre que

$$\frac{2}{L}\int_0^L f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

12. Se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\ nx + b_n sen\ nx$ qual a série de Fourier de $g(x) = f(x)sen\ x$?

13. Seja $f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}cos\ 2nx + \frac{1}{n^2+1}sen\ (2n+1)x$ quais os valores de:

    a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\ 20x\ dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen\ 20x\ dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

14. Escreva a série de Fourier em senos, das funções abaixo:

    a) $f(x) = 25,$ para $x \in [0, \pi]$ b) $f(x) = senx,$ para $x \in [0, \pi]$

    c) $f(x) = x,$ para $x \in [0, \pi]$ d) $f(x) = cosx,$ para $x \in [0, \pi]$.

    d) $f(x) = |2x - \pi|,$ para $x \in]0, \pi[$ e) $f(x) = senx,$ para $x \in [0, \pi]$.

    f) $f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \le x \le 1 \\ 1, & se \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

15. Escreva a série de Fourier em co-senos das funções dadas no exercício anterior e compare com os resultados obtidos anteriormente.

    a) $f(x) = 25,$ para $x \in [0, \pi]$ b) $f(x) = senx,$ para $x \in [0, \pi]$

    c) $f(x) = x,$ para $x \in [0, \pi]$ d) $f(x) = cosx,$ para $x \in [0, \pi]$.

    d) $f(x) = |2x - \pi|,$ para $x \in]0, \pi[$ e) $f(x) = senx,$ para $x \in [0, \pi]$.

    f) $f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad 0 \le x \le 1 \\ 1, & se \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

    OBS: Os dois últimos exercícios serão usados na próxima lista de exercícios.

    BOM TRABALHO!