

PIPGEs ICMC – USP/UFSCar
EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1
7ª lista de exercícios

1. Considere uma única observação de uma população com função densidade $f(x; \theta) = \{2\theta x + 1 - \theta\}I_{(0,1)}(x)$, $\theta \in [-1, 1]$.
 - (a) Apresente o gráfico de $f(x; \theta)$ levando em conta os diferentes valores de θ .
 - (b) Apresente o teste mais poderoso de tamanho α , $0 < \alpha < 1$, para as hipóteses $H_0 : \theta = 0$ e $H_1 : \theta = 1$.
 - (c) A fim de testar $H_0 : \theta \leq 0$ contra $H_1 : \theta > 0$ foi proposto um teste com região crítica $R = \{x : x > 1/2\}$. Apresente o gráfico da função poder deste teste. Calcule o tamanho deste teste.

2. Em cada um dos itens de 2a a 2i apresente o gráfico da função densidade ou massa de probabilidade. Proponha um teste mais poderoso de tamanho α , $0 < \alpha < 1$, e calcule o seu poder. As hipóteses são $H_0 : \theta = \theta_0$ e $H_1 : \theta = \theta_1$. Suponha que uma amostra aleatória de tamanho n foi coletada.
 - (a) $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, $0 < \theta < 1$. Considere $\theta_1 > \theta_0$.
 - (b) $X \sim f(x; \theta) = \theta(1 - \theta)^{x-1}$, se $x = 1, 2, \dots$, $0 < \theta < 1$. Considere $\theta_1 < \theta_0$.
 - (c) $X \sim f(x; \theta) = 2(\theta - x)/\theta^2$, se $0 < x < \theta$. Considere $\theta_1 > \theta_0$.
 - (d) $X \sim f(x; \theta) = \exp\{-(x - \theta)\}$, se $x \geq \theta$. Considere $\theta_1 > \theta_0$.
 - (e) $X \sim f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}$, se $0 < x < 1$, $\theta > 0$. Considere $\theta_0 = 1$ e $\theta_1 > \theta_0$.
 - (f) $X \sim f(x; \theta) = \theta/x^2$, se $0 < \theta \leq x$. Considere $\theta_1 > \theta_0$.
 - (g) $X \sim \text{normal}(\theta, 1)$. Considere $\theta_1 < \theta_0$.
 - (h) $X \sim \text{normal}(0, \theta^2)$. Considere $\theta_1 > \theta_0$.
 - (i) $X \sim \text{uniforme}([0, \theta])$, $\theta > 0$. Considere $\theta_1 > \theta_0$.

3. Sejam $X_1, X_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}(\theta, \theta + 1)$. A fim de testar $H_0 : \theta = 0$ contra $H_1 : \theta > 0$, os dois testes abaixo são propostos.

Teste 1: rejeitar H_0 se, e somente se, $X_1 > 0,95$ e

Teste 2: rejeitar H_0 se, e somente se, $X_1 + X_2 > c$.

 - (a) Calcule o tamanho do primeiro teste e determine o valor de c para que os dois testes tenham o mesmo tamanho.

(b) Se você tivesse que optar por um dos testes, qual seria a sua escolha?

4. Uma única observação é obtida de uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x; \theta) = \{2(1 - \theta)x + \theta\} I_{[0,1]}(x), \quad 0 \leq \theta \leq 2.$$

(a) Apresente o gráfico da função densidade levando em conta os diferentes valores de θ .

(b) Apresente um teste de $H_0 : \theta = 2$ contra $H_1 : \theta = 0$ com tamanho igual a 0,05. Qual o poder do teste?

(c) Se $x = 0,8$, qual é a sua decisão?