USP – ICMC – SME0320 - Estatística I
1ª prova – 1º/2019

S O L U Ç Ã O

1. Automóveis chegam a uma central de manutenção em quantidade média de 10 a cada hora. Além disso, com probabilidade $0,6$, cada veículo que chega não necessita de manutenção. Qual a probabilidade de nove automóveis chegarem durante uma certa hora e cinco deles necessitarem de manutenção?
SOLUÇÃO. Definimos a variável aleatória X como sendo o número de automóveis que chegam a uma central de manutenção no intervalo de uma hora. De acordo com o enunciado, a média desta variável é 10. Supomos que a distribuição de X é $\mathsf{Poisson}(10)$. Definimos também a variável aleatória Y como sendo o número de automóveis que chegam no intervalo de uma hora e que necessitam de manutenção. Supomos que há independência entre os automóveis. Se no intervalo de uma hora chegarem x automóveis, segundo o enunciado, a distribuição de Y é $\mathsf{binomial}(x, 0, 4)$. A probabilidade a ser calculada é $\mathrm{P}\big((X = 9) \cap (Y = 5)\big)$. Usando a regra do produto obtemos
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((X = 9) \cap (Y = 5)\big) &= \mathrm{P}(Y = 5|X = 9)\,\mathrm{P}(X = 9)\\ &= \binom{9}{5} \times 0,4^5 \times 0,6^4 \times \frac{e^{-10} \times 10^9}{9!} = 0,0209.\end{aligned}$$

2. Três empresas fornecem componentes para um fabricante de equipamentos de telemetria. O fabricante testou por vários anos os componentes recebidos e obteve os dados da tabela abaixo. Um componente selecionado aleatoriamente foi testado e verificou-se que é defeituoso. Qual seria

Fornecedor	Fração defeituosa	Fração fornecida
F1	0,035	0,25
F2	0,01	0,60
F3	0,02	0,15

o fornecedor deste componente?
SOLUÇÃO. O evento F_j indica um componente fornecido pela empresa j, $j = 1, 2, 3$, enquanto D indica um componente defeituoso. Pelos dados da tabela, temos $P(F_1) = 0,25$, $P(F_2) = 0,60$, $P(F_3) = 0,15$, $P(D|F_1) = 0,035$, $P(D|F_2) = 0,01$ e $P(D|F_3) = 0,02$. Notamos que os eventos F_1, F_2 e F_3 formam uma partição do espaço amostral.

Calculamos $P(F_j|D)$, $j = 1, 2, 3$, e com base nestas probabilidades, selecionamos o fornecedor do componente defeituoso como sendo o de maior probabilidade. Pela fórmula de Bayes,
$$P(F_j|D) = \frac{P(D|F_j)P(F_j)}{P(D)},\ j = 1, 2, 3, \tag{1}$$
em que $P(D) = \sum_{k=1}^{3} P(D|F_k)P(F_k) = 0,0175$. Com este resultado, os dados da tabela e (1), obtemos $P(F_1|D) = 0,493$, $P(F_2|D) = 0,338$ e $P(F_3|D) = 0,169$. Portanto, o fornecedor F1 é o mais provável.

Obs. Na expressão (1) temos $P(F_j|D) \propto P(D|F_j)P(F_j)$, $j = 1, 2, 3$, de modo que é possível responder a pergunta sem calcular o denominador $P(D)$.

3. Em cinco volumes de uma solução foram medidos os tempos de aquecimento em um mesmo bico de gás e as respectivas temperaturas. Os resultados foram os seguintes:
Tempo (min): 22, 20, 19, 23 e 17 e temperatura (°C): 75, 80, 78, 84 e 78.

Qual das duas variáveis apresenta maior variabilidade?

Solução. Como as unidades de medida das variáveis são diferentes, a variabilidade será comparada utilizando o coeficiente de variação CV. Em uma amostra com observações $x_1, \ldots, x_n$, a média e o desvio padrão são são dados por $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ e $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2/(n-1)}$. Para a variável tempo obtemos $\overline{x} = 20,2\,\mathrm{min}$, $s = 2,39\,\mathrm{min}$ e $CV = s/\overline{x} \times 100 = 11,8\%$. Para a variável temperatura obtemos $\overline{x} = 79\,°\mathrm{C}$, $s = 3,32\,°\mathrm{C}$ e $CV = s/\overline{x} \times 100 = 4,2\%$. Logo, a variável tempo apresenta maior variabilidade.

4. O tempo de vida de um certo componente é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média 1000 horas. O fabricante deste componente pretende oferecer uma certa garantia de funcionamento. Qual deve ser a garantia, em horas, de modo que haja uma probabilidade igual a $0,95$ de que o componente funcionará pelo menos o número de horas garantidas?

   Solução. A variável aleatória X representa o tempo de vida em horas. Pelo enunciado, a função distribuição acumulada é $F(x) = 1 - \exp(-x/1000)$, para $x \geq 0$. Devemos obter x_0 tal que $P(X \geq x_0) = 0,95$. Temos que $P(X \geq x_0) = 1 - P(X < x_0) = 1 - P(X \leq x_0) = 1 - F(x_0) = \exp(-x/1000)$. Igualando a 0,95 obtemos $x_0 = -1000 \times \ln(0,95) \approx 51,3$ horas.

5. Dados coletados durante muitos anos revelam que a espessura de placas de madeira é uma variável aleatória com média 7,0 mm e desvio padrão 0,4 mm.

   (a) Placas com espessura entre 6,2 e 7,2 mm são aceitáveis. Qual a probabilidade de que uma placa selecionada aleatoriamente seja aceitável?

   Solução. Supomos que a variável aleatória espessura, denotada por X, tem distribuição normal, ou seja, $X \sim N(7,0; 0,4^2)$. Se $6,2 < X < 7,2$, em mm, a placa é aceitável. A probabilidade deste evento é dada por

$$
\begin{aligned}
P(6,2 < X < 7,2) &= P\left(\frac{6,2-7,0}{0,4} < \frac{X-7,0}{0,4} < \frac{7,2-7,0}{0,4}\right) \\
&= P(-2,00 < Z < 0,50) = 0,6915 - 0,0228 = 0,6687,
\end{aligned}
$$

   sendo que na penúltima passagem acima consultamos a Tabela A.3.

   (b) Em um lote de sete placas, qual a probabilidade de que no máximo duas placas sejam inaceitáveis?

Solução. De acordo com o item 5a, a probabilidade de que uma placa seja inaceitável é $p = 1 - 0,6687 = 0,3313$. Supondo independência, o número de placas inaceitáveis Y em um lote de sete placas é uma variável aleatória com distribuição binomial, ou seja, $Y \sim B(n = 7; p = 0,3313)$. Devemos calcular $P(0 \leq Y \leq 2)$, dada por

$$
\binom{7}{0} \times 0,3313^0 \times 0,6687^7 + \binom{7}{1} \times 0,3313^1 \times 0,6687^6 + \binom{7}{2} \times 0,3313^2 \times 0,6687^5 = 0,5754.
$$