

1. $(X_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias $\stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(0, \sigma^2)$. Prove que $Y_n = k \sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{n}$ é um estimador consistente de σ se, e somente se, $k = \sqrt{\pi/2}$.

2. Utilize um teorema central do limite para provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} = \frac{1}{2}.$$

3. $(X_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme $([-2^{n/2}, 2^{n/2}])$ para todo $n \geq 1$. Prove que a condição de Lindeberg não é satisfeita.

4. $(X_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal $(0, 2^{-n})$ para todo $n \geq 1$.

(a) Pode ser afirmado que $T_n/s_n \xrightarrow{D} Z \sim \text{normal}(0, 1)$?

(b) Pode ser afirmado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \max_{i=1, \dots, n} (\text{var}(X_i)) = 0$?

(c) A condição de Lindeberg é satisfeita?

5. $(X_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson (2^{-n}) para todo $n \geq 1$.

(a) Estude a convergência da sequência $(X_n)_{n \geq 1}$.

(b) Estude a convergência da sequência $(T_n)_{n \geq 1}$.

(c) Pode ser afirmado que $(T_n - s_n^2)/s_n \xrightarrow{D} Z \sim \text{normal}(0, 1)$?

(d) Pode ser afirmado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \max_{i=1, \dots, n} (\text{var}(X_i)) = 0$?

(e) A condição de Lindeberg é satisfeita?

6. $(X_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme $([-n, n])$ para todo $n \geq 1$. Prove que $T_n/s_n \xrightarrow{D} Z \sim \text{normal}(0, 1)$.

Sugestão. Para $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i^\alpha/n^{\alpha+1} = 1/(\alpha + 1)$, de modo que $\sum_{i=1}^n i^\alpha = O(n^{\alpha+1})$.

7. $(X_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes com função densidade de probabilidade

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} \exp(-|x|/n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prove que $\{T_n - E(T_n)\}/s_n \xrightarrow{D} Z \sim \text{normal}(0, 1)$.

8. $(X_n)_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes definidas em (Ω, \mathcal{A}, P) tais que $P(|X_i| \leq M_n) = 1$, para $i = 1, \dots, n$ e $n \geq 1$. Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n/s_n = 0$. Prove que a condição de Liapounov é satisfeita.

¹Se $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias em (Ω, \mathcal{A}, P) , definimos $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $s_n^2 = \text{var}(T_n)$.