

Multiresolution and the Wavelet Transform

Image Processing — scc0251

`www.icmc.usp.br/~moacir` — `moacir@icmc.usp.br`

ICMC/USP — São Carlos, SP, Brazil

2011

Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Transformadas de imagens

- Transformações matemáticas são aplicadas a sinais para obter informações não disponíveis (ou não visíveis) diretamente no sinal original.
- Um sinal unidimensional está geralmente no **domínio do tempo** em sua forma original.
 - quando exibimos o sinal temos uma representação tempo-amplitude.
- Uma imagem (sinal bidimensional), geralmente no **domínio do espaço**
 - quando exibimos a imagem temos uma representação espaço-amplitude (ou espaço-intensidade)
- Informação importante sobre o sinal está oculta no conteúdo em frequência do sinal.
 - o espectro de frequência é composto dos componentes de frequência (ou espectrais) do sinal, mostrando quais frequências existem no sinal

Transformadas de imagens

- A informação em frequência
- Indica como a amplitude do sinal se modifica ao longo do tempo (ou espaço)
 - há variações suaves ou abruptas?
 - a frequência é medida em ciclos por segundo (Hertz)

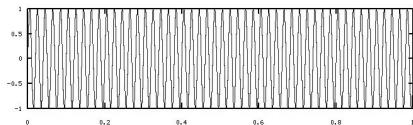
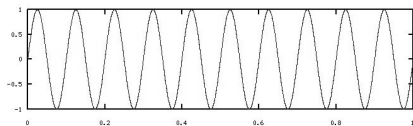
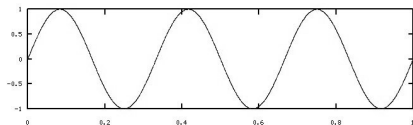
```
Fs = 1000;           % freq. amostragem
```

```
t = 0:(1/Fs):1;     % amostragem
```

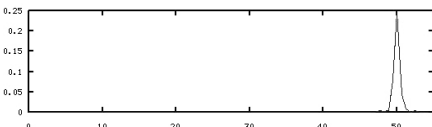
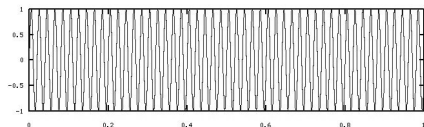
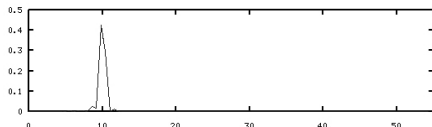
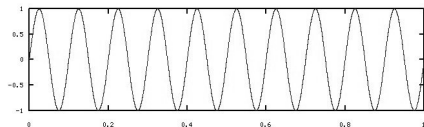
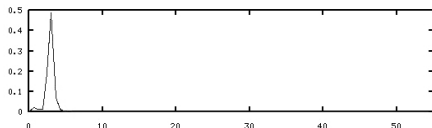
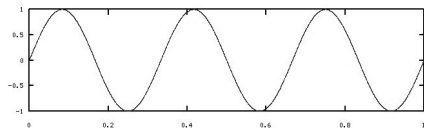
```
Fr = 3;             % freq. do sinal
```

```
% sinal senoidal com freq. Fr
```

```
x = sin((2 * pi) * Fr * t);
```



Transformadas de imagens



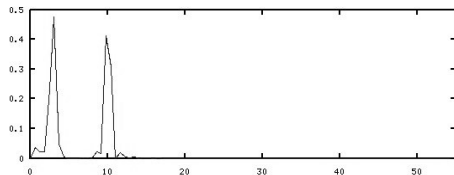
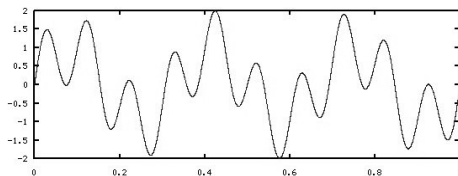
```
nfft = 2^(nextpow2(length(x))); % encontra a proxima potencia de 2
W = fft(x,nfft); % realiza FFT
nuniq = ceil((nfft+1)/2); % encontra indices de metade da FFT simétrica
```

```
% espectro de potencia reescalado
W = ( abs(W(1:nuniq)) / length(x) ).^2;
```

Transformadas de imagens

Ao analisar um sinal mais complexo, como a soma:

$$x = \sin((2 * \text{pi}) * 3 * t) + \sin((2 * \text{pi}) * 10 * t);$$

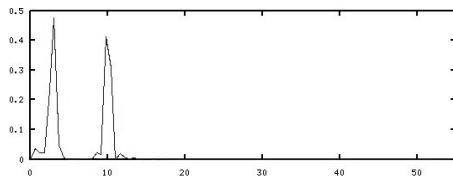
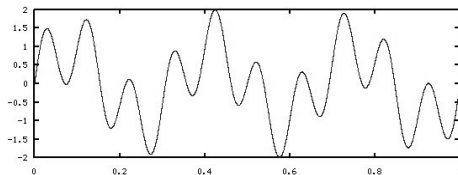


Imagens de estatísticas locais diferentes

- Um exemplo prático de análise em frequência é o diagnóstico por ECG (eletrocardiograma)
- analisadores de ECG utilizam a informação em frequência para auxiliar no diagnóstico de alguma patologia.

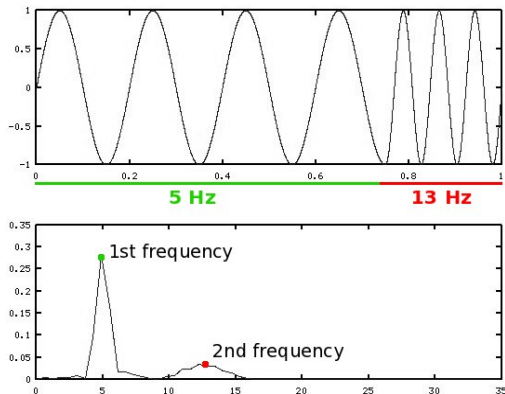
Análise em frequência de sinais estacionários

- A transformada de Fourier permite analisar bem sinais estacionários,
- um exemplo é o sinal abaixo que possui frequência 3 e 10 em qualquer posição do tempo.



Análise em frequência de sinais não estacionários

- Sinais não-estacionários, como abaixo, no qual uma parte ($\sim 75\%$) do sinal tem frequência 5 Hz e o restante 13 Hz, dificultam a análise
- A análise pela transformada de Fourier fornece as frequências e a presença no sinal, mas **não em que posição do sinal elas ocorrem**.



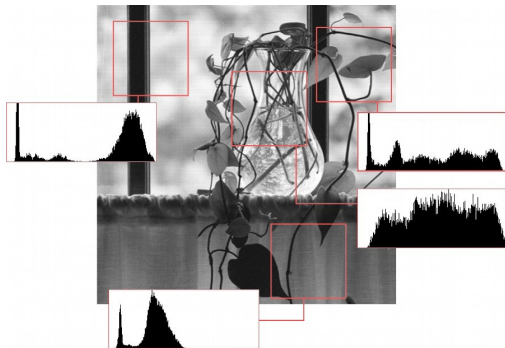
Imagens de estatísticas locais diferentes (não-estacionárias)

- Em imagens, objetos pequenos e com baixo contraste são melhor analisados em alta resolução
- ... enquanto objetos grandes ou com alto contraste necessitam apenas de uma visão mais grosseira



Imagens de estatísticas locais diferentes (não-estacionárias)

- O que fazer para analisar ao mesmo tempo objetos pequenos e grandes (ou de alto e baixo contraste) presentes em imagens?
- ... analisar em várias resoluções.
- Histogramas locais podem variar significativamente de uma parte da imagem para outra, dificultando a modelagem estatística ao longo de toda a imagem.



Agenda

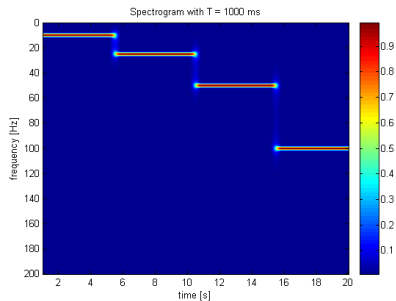
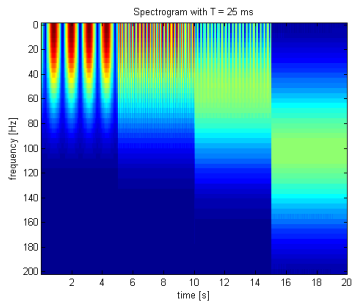
- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)**
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Análise em frequência de sinais não estacionários

- Uma saída para a análise de sinais não estacionários é a STFT (Short-Time Fourier Transform)
- Criada para analisar sinais com estatística diferente em diferentes posições no tempo (ou espaço)
- A STFT funciona utilizando uma janela móvel de forma que a análise de cada janela possa ser feita considerando o sinal estacionário naquela região.
- A resolução é fixa:
 - uma janela grande fornece melhor resolução em frequência porém menor resolução em tempo
 - uma janela menor fornece melhor resolução em tempo mas menor resolução em frequência
- Transformada amplamente utilizada para analisar áudio.

Análise em frequência de sinais não estacionários

Espectrogramas de um sinal não estacionário, com janelas de tamanho diferente.



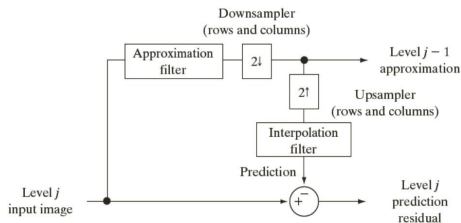
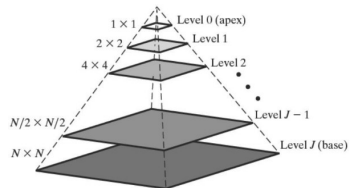
creditos: Alessio Damasio (Creative Commons License)

Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem**
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Pirâmides de imagem

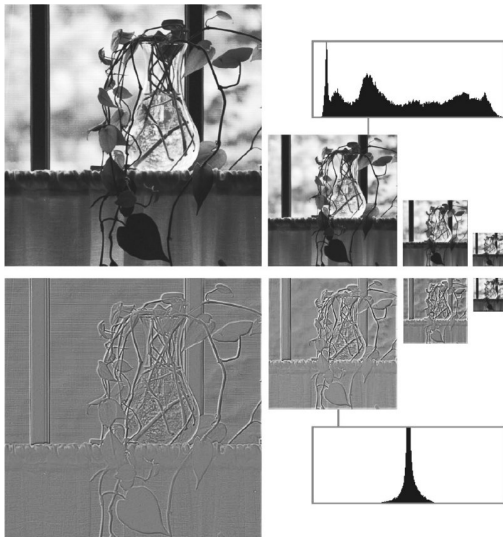
- Coleção de imagens de resolução cada vez menor, organizada em pirâmide é chamada **pirâmide de aproximação**
- A base contém a representação de alta resolução e o ápice uma aproximação de baixa resolução.
- A **pirâmide de residual** também pode ser calculada, representando a diferença entre duas aproximações sucessivas.



Pirâmides de imagem: construção

- 1 Calcule uma aproximação (de resolução reduzida) da imagem de entrada j : filtragem e subamostragem por um fator 2 e posicione o resultado no nível $j - 1$.
- 2 Crie uma estimativa da imagem de entrada a partir da aproximação: superamostragem por fator 2 e filtragem
- 3 Calcule a diferença entre as imagens geradas no passo 1 e 2, posicione o resultado no nível j da pirâmide de residual.

Pirâmides de imagem: construção



Pirâmides de imagem: construção

- Diferentes filtros de aproximação podem ser usados, exemplos:
 - Média: pirâmide média
 - Gaussiano: pirâmide Gaussiana
 - sem filtragem: pirâmide de subamostragem
- Assim como os de interpolação, exemplos
 - Linear
 - Bi-linear

Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas**
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

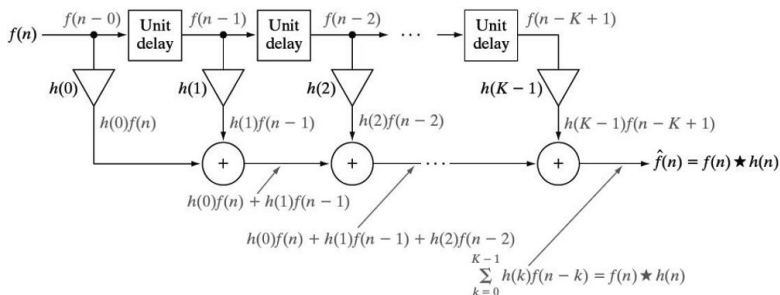
Codificação em sub-bandas

- Decompor a imagem em componentes de banda limitada
 - de forma que seja possível reconstruir a imagem original a partir das sub-bandas.
- (Pequena revisão de filtragem digital de sinais)

Filtragem digital de sinais

- Baseados em atrasos unitários, multiplicadores e somadores
 - abaixo, cria versões atrasadas de $K - 1$ (deslocadas) da entrada $f(n)$.
 - a entrada $f(n)$ e suas sequências atrasadas $f(n - 1), f(n - 2), \dots$ são multiplicadas por constantes $h(0), h(1), h(2), \dots$ e somadas
 - a saída filtrada é dada por:

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)f(n - k) = f(n) * h(n)$$

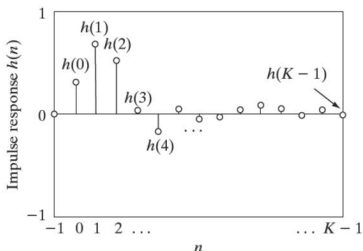
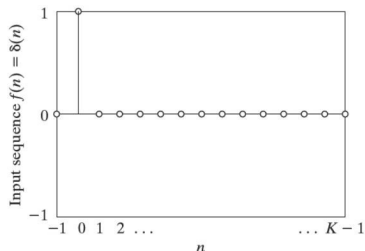


Filtragem digital de sinais

- Uma forma de entender o filtro é fazer a entrada igual a um impulso unitário $\delta(n)$
 - como a resposta será, em cada ponto, o resultado da sequência de valores $h(0), h(1)$ multiplicados por 1:

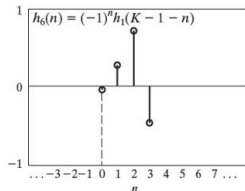
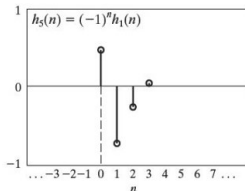
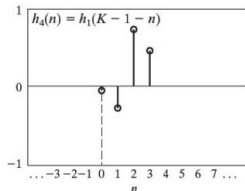
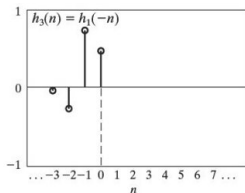
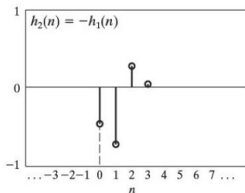
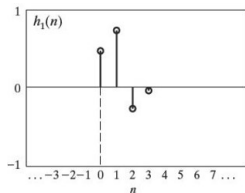
$$\hat{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\delta(n-k) = h(n)$$

- por isso $h(n)$ é chamado de resposta ao impulso. A resposta possui K coeficientes e o filtro é chamado *finite impulse response* (FIR).



Filtragem digital de sinais

- Exemplos de filtros de resposta impulsiva relacionadas funcionalmente:
 - original
 - sinal reverso;
 - e (d) ordem reversa;
 - modulação;
 - ordem reversa e modulação.

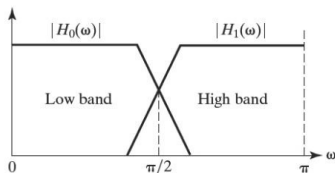
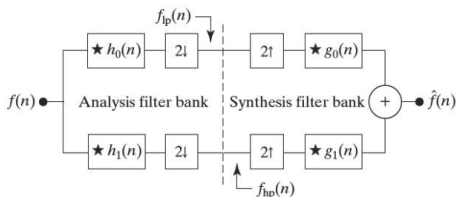


Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas**
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros**
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Bancos de filtros

- Sistema de codificação em duas sub-bandas: dois bancos de filtros (dois filtros FIR cada)
- Banco de filtros de análise h :
 - divide a entrada $f(n)$ em duas (sub-bandas) da metade do tamanho f_{lp} e f_{hp}
 - h_0 : passa-baixa (aproximação)
 - h_1 : passa-alta (detalhe)
- Banco de filtros de síntese g :
 - usam f_{lp} e f_{hp} e produzem \hat{f}



- Quando selecionamos filtros de análise e síntese de forma que $\hat{f} = f$ temos filtros de reconstrução perfeita.

Bancos de filtros

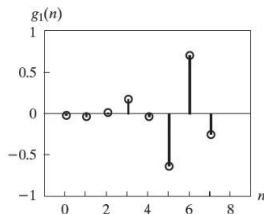
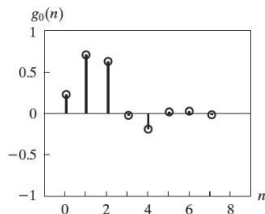
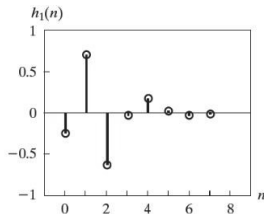
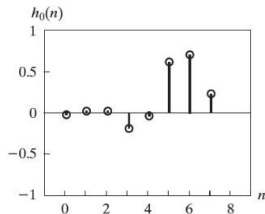
- **Ortonormalidade** para bancos de filtros de reconstrução perfeita:

$$\langle g_i(n), g_j(n + 2m) \rangle = \delta(i - j)\delta(m),$$
$$i, j = \{0, 1\}$$

- um banco de filtros ortonormais pode ser obtido a partir da resposta ao impulso de um único filtro (protótipo)
- OBS: um conjunto de vetores ortornormais pode gerar um subespaço. A Transformada de Fourier pode ser vista como a mudança de base de um sinal por funções senoidais (seno e cosseno).

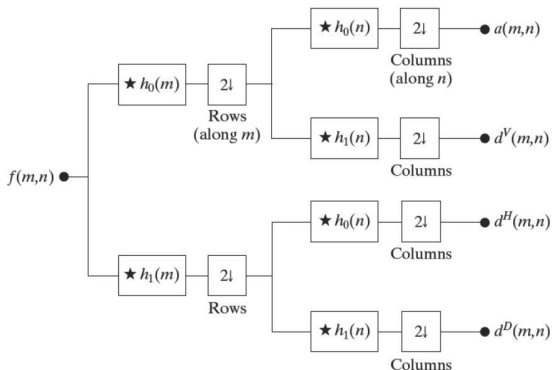
Bancos de filtros

- Respostas impulsivas de quatro filtros ortonormais de Daubechies com 8 coeficientes cada.



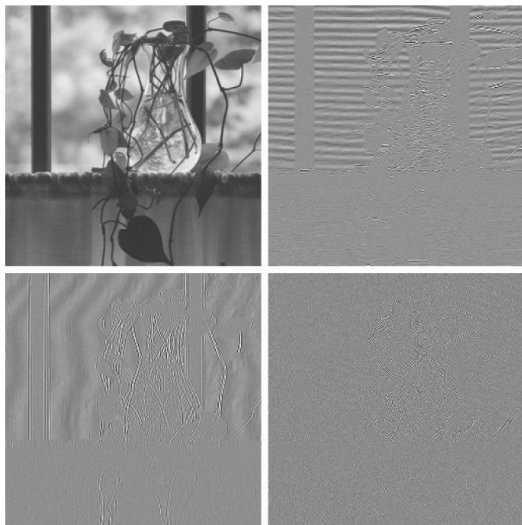
Bancos de filtros

- Exemplo de codificação de uma imagem em quatro sub-bandas



Bancos de filtros

- Resultado de codificação de uma imagem em quatro sub-bandas



Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar**
- 6 Transformada Wavelet
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Transformada de Haar

- As funções de base Haar são as funções ortonormais mais antigas e mais simples conhecidas
- A transformada pode ser expressa como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^T,$$

onde \mathbf{F} é a matriz da imagem de tamanho $N \times N$, \mathbf{H} a matriz $N \times N$ da transformada de Haar e \mathbf{T} é a transformada resultante.

- A transposta é necessária porque \mathbf{H} não é simétrica.
- A geração da matriz é feita usando as funções de base de Haar $h_k(z)$.

Transformada de Haar

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & (q-1)/2^p \leq z < (q-0,5)/2^p \\ -2^{p/2} & (q-0,5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $z \in [0, 1]$

- a i -ésima linha contém os elementos de $h_1(z)$ para $z = 0/N, 1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N$.
- pela equação acima, $h_0(z) = 1/\sqrt{N}$ independente de z
- k é definido de forma que $k = 2^p + q - 1$.

Transformada de Haar

Para $N = 2$, a primeira linha da matriz é calculada utilizando $h_0(z)$ com $z = 0/2, 1/2$. Como $h_0(z)$ é independente de z :

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A segunda linha é obtida calculando $h_1(z)$ com $z = 0/2, 1/2$. Como $k = 2^p + q - 1$, quando $k = 1$: $p = 0$ e $q = 1$. Assim:

$$h_1(0) = 2^0/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$$

$$h_1(1/2) = -2^0/\sqrt{2} = -1/\sqrt{2}$$

A matriz final é:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Transformada de Haar

Para $N = 4$, as variáveis assumem os valores:

k	p	q
0	0	0
1	0	1
2	1	1
3	1	2

A matriz 4×4 é:

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Transformada de Haar

- A transformada de Haar multiplica uma função (sinal, imagem) com a função de base Haar ou ondaleta (*wavelet*) Haar em diversas escalas e deslocamentos.
- Para comparação, a transformada de Fourier multiplica uma função (sinal, imagem) com uma onda senoidal com duas fases (seno e cosseno) e diversas escalas.

Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet**
 - **Funções de escala**
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Expansão em séries

- Um sinal ou função f pode ser analisado como uma combinação linear de funções de expansão:

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \Phi_k(x), \quad (1)$$

onde k é um número inteiro que corresponde ao índice de uma soma finita ou infinita, α são coeficientes de expansão, e $\Phi_k(x)$ funções de expansão.

- se a expansão for única, ou α_k é único para uma dada função $f(x)$, $\Phi_k(x)$ são chamadas de **funções de base**.
- o conjunto de todas as combinações lineares das funções de base formam um **espaço gerador do conjunto de expansão**:

$$V = \text{Span}_k \{ \Phi_k(x) \},$$

onde $f(x) \in V$ significa que $f(x)$ está no espaço gerador de $\{ \Phi_k(x) \}$ e pode ser expressa pela equação 1.

Funções de Escala

- Considerando o conjunto das funções de expansão composto de translações por inteiros e escalas binárias da função real $\Phi(x)$, esse é o conjunto $\{\Phi(x)_{j,k}\}$, no qual:

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Phi(2^j x - k)$$

para todos $j, k \in \mathbb{Z}$ e $\Phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ (espaço de funções quadrado-integráveis, de energia finita).

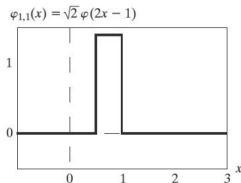
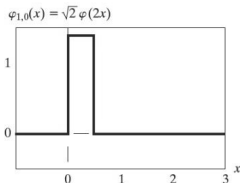
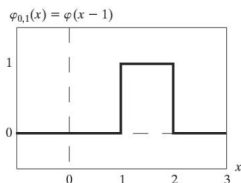
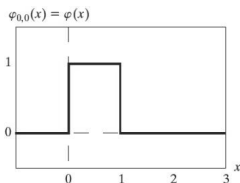
- k determina a posição (deslocamento) de $\Phi(x)_{j,k}$ ao longo do eixo x
- j determina a largura de $\Phi(x)_{j,k}$, quão larga ou estreita ao longo de x
- 2^j controla a amplitude da função
- como o formato varia conforme j , é chamada **função de escala**.

Função de escala

- Um exemplo simples de função de escala

$$\Phi_{j,k}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{em outras posições,} \end{cases}$$

chamada função de escala de Haar



Função de escala

- Fixando $j = j_0$, $\{\Phi(x)_{j_0,k}\}$ gera um subespaço de $L^2(\mathbb{R})$. Para um dado j esse subespaço é:

$$V_j = \text{Span}_k \{ \Phi_{j,k}(x) \},$$

- à medida que j aumenta, as funções se tornam mais estreitas e separadas por variações menores de x .

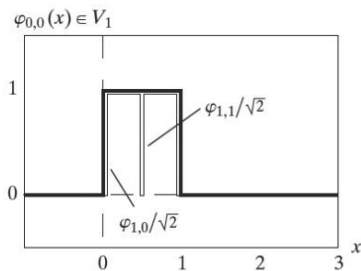
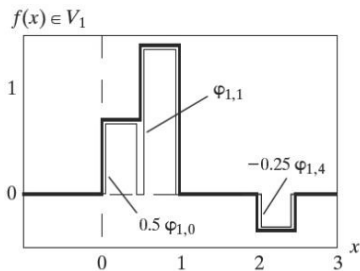
Função de escala

- Exemplos: $f(x) \in V_1$ (mas não a V_0):

$$f(x) = 0,5\Phi_{1,0}(x) + \Phi_{1,1}(x) - 0,25\Phi_{1,4}(x)$$

- ... e $\Phi_{0,0}(x) \in V_1$:

$$\Phi_{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{1,2}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{1,2k+1}(x)$$



Função de escala

- V_0 não consegue cobrir o espaço completo, pois apenas estamos deslocando a função, sem aumentar/diminuir sua escala.
- Para que seja possível realizar análise multirresolução é preciso que subespaços contendo funções de alta resolução, contenham todas as funções de resolução mais baixa:

$$V_{-\infty} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{\infty}$$

Função de escala

- Como as funções de expansão de V_j podem ser expressas como uma soma ponderada das funções de expansão de V_{j+1} :

$$\Phi_{j,k}(x) = \sum_n \alpha_n \Phi_{j+1,n}$$

- Substituindo a definição $\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Phi(2^j x - k)$, atribuindo $(j, k) = (0, 0)$, pois $\Phi_{0,0}(x) = \Phi(x)$, e substituindo $\alpha_n = h_\Phi(n)$:

$$\Phi(x) = \sum_n h_\Phi(n) \sqrt{2} \Phi(2x - n)$$

- chamada equação de análise multirresolução, estabelece que as funções de expansão de qualquer subespaço podem ser construídas a partir de cópias de resolução duas vezes maior.
- cada deslocamento n estará associado a um coeficiente $h_\Phi(n)$

Coeficientes da função de escala de Haar

- Usando os coeficientes da escala de Haar:

$$h_{\Phi}(0) = h_{\Phi}(1) = \frac{2^0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- ... ou seja, a primeira linha da matriz \mathbf{H}_2 , qual será a forma da equação abaixo?

$$\Phi(x) = \sum_n h_{\Phi}(n) \sqrt{2} \Phi(2x - n)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} \Phi(2x - 0) \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} \Phi(2x - 1) \right]$$

$$\Phi(x) = \Phi(2x) + \Phi(2x - 1)$$

Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet**
 - Funções de escala
 - Funções wavelet**
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

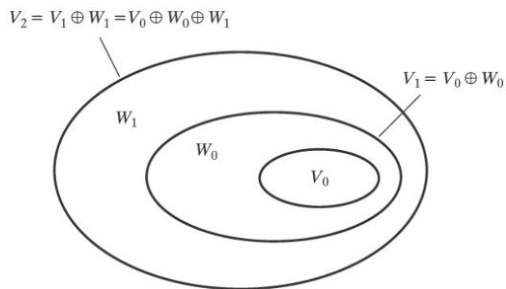
Função wavelet

- Dado o conjunto de expansão $\{\Phi(x)_{1,k}\}$, desejo criar uma função que gere o espaço $W_1 = V_1 \ominus V_0$.
- essa função deve gerar a **diferença** entre dois subspaços quaisquer de escala adjacente, e de forma mais geral:

$$W_j = \text{Span}_k \{ \Psi_{j,k}(x) \},$$

- essa função pode ser vista como uma **função passa-alta** — em contraste com as funções de escala que são funções passa-baixa.
- a função $\Psi_{j,k}(x)$ é chamada **função wavelet**.
- o conjunto $\{ \Psi_{j,k}(x) \}$ é chamado conjunto de funções wavelet para todo $k \in \mathbb{Z}$

Função wavelet



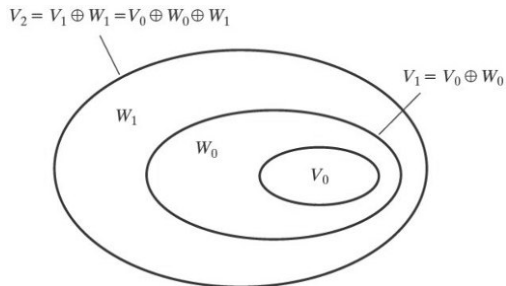
- Os subespaços de função de escala e wavelet estão relacionados por:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

- A forma das funções wavelet é:

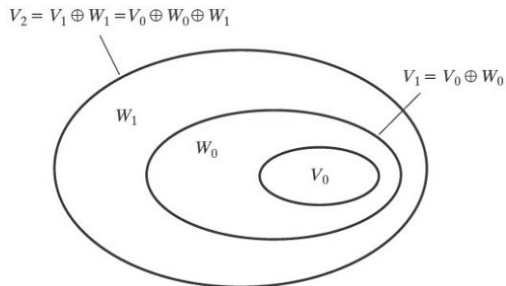
$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

Função wavelet



- Para obter o subespaço $V_2 = (V_0 \oplus W_0) \oplus W_1$, preciso de:
 - uma função de escala para obter V_0
 - uma função wavelet para obter W_0
 - uma função wavelet para obter W_1

Função wavelet



- Para obter o subespaço W_1 , utilizo V_2 .
- W_1 pode ser obtido a partir de versões deslocadas de V_2 :

$$\Psi(x) = \sum_n h_\Psi(n) \sqrt{2} \Phi(2x - n),$$

ou seja, $\Psi(x)$ pode ser obtido por versões deslocadas de $\Phi(2x)$

Coeficientes da função wavelet de Haar

- Para as wavelets de Haar, h_Ψ se relaciona com h_Φ :

$$h_\Psi(n) = (-1)^n h_\Phi(1 - n)$$

- a partir dos coeficientes de escala, obtemos:

$$h_\Psi(0) = (-1)^0 h_\Phi(1 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_\Psi(1) = (-1)^1 h_\Phi(1 - 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

que corresponde à segunda linha da matriz \mathbf{H}_2 .

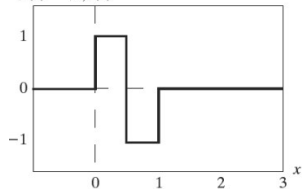
- substituindo, $\Psi(x) = \Phi(2x) - \Phi(2x - 1)$ e:

$$\Psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{em outras posições,} \end{cases}$$

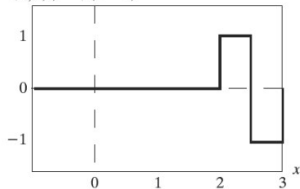
Coeficientes da função wavelet de Haar

Exemplos de funções wavelet de Haar

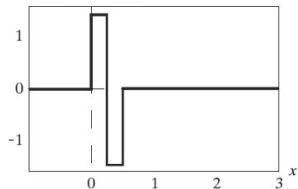
$$\psi(x) = \psi_{0,0}(x)$$



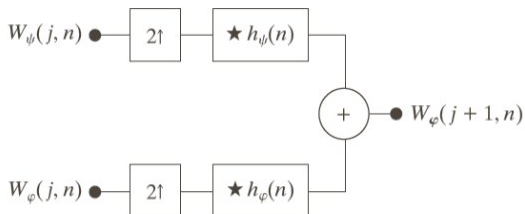
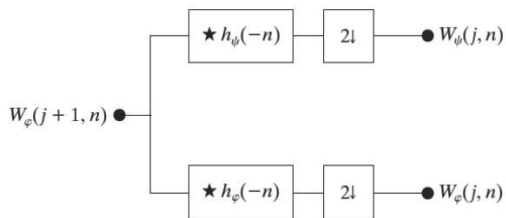
$$\psi_{0,2}(x) = \psi(x - 2)$$



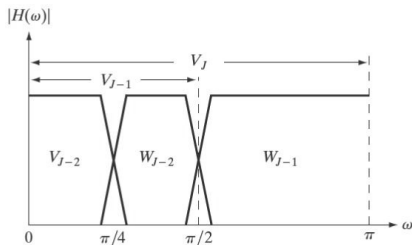
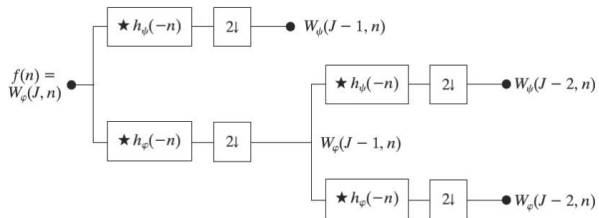
$$\psi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \psi(2x)$$



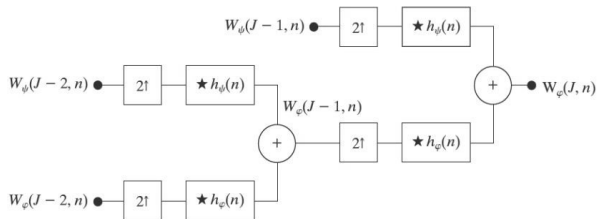
Banco de filtros Wavelet



Banco de filtros Wavelet (2)



Banco de filtros Wavelet (2)



Agenda

- 1 Introdução
- 2 STFT (Short-Time Fourier Transform)
- 3 Pirâmides de imagem
- 4 Codificação em sub-bandas
 - Filtragem digital de sinais
 - Banco de filtros
- 5 Transformada de Haar
- 6 Transformada Wavelet**
 - Funções de escala
 - Funções wavelet
 - Transformada Wavelet Discreta 2D

Transformada Wavelet Discreta 2D

- Assumindo versões amostradas das funções de base $\Phi_{j,m,n}(x, y)$ e $\Psi_{j,m,n}(x, y)$, a transformada Wavelet de uma imagem de tamanho $M \times N$ é:

$$W_{\Phi}(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \Phi_{j_0, m, n}(x, y),$$

$$W_{\Psi}^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \Psi_{j, m, n}^i(x, y),$$

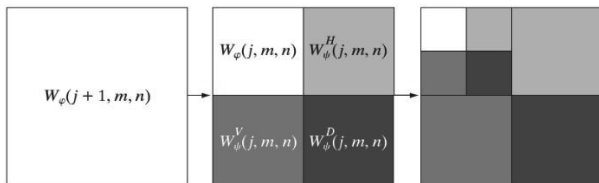
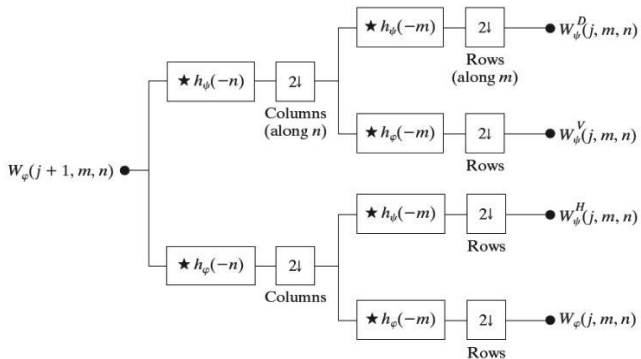
onde $i = \{H, V, D\}$

Transformada Wavelet Discreta 2D

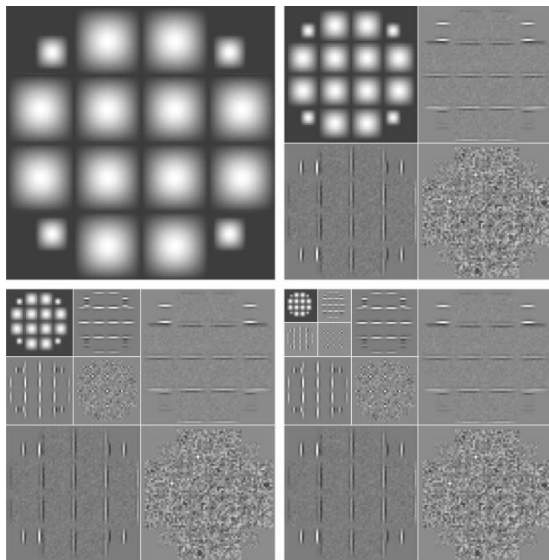
- E a transformada inversa Wavelet 2D discreta:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_\Phi(j_0, m, n) \Phi_{j_0, m, n}(x, y) \\ + \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H, V, D} \sum_m \sum_n W_\Psi^i(j, m, n) \Psi_{j, m, n}^i(x, y)$$

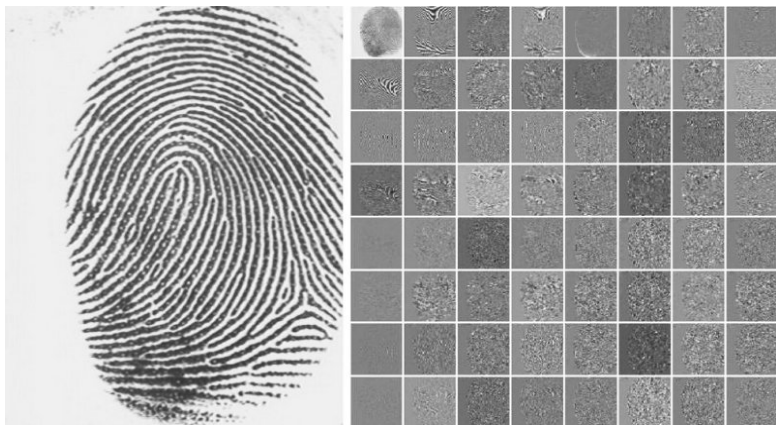
Banco de filtros Wavelet 2D



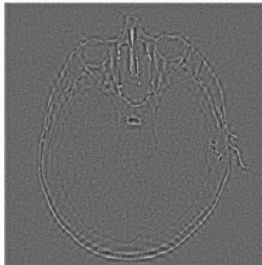
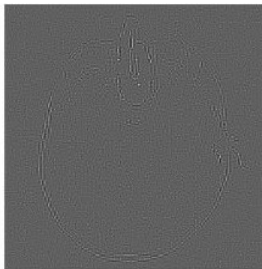
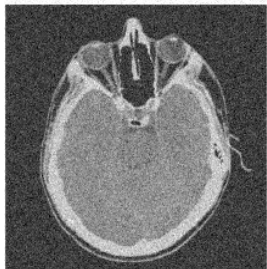
Exemplo 1: três escalas diferentes



Exemplo 2: pacote wavelets para descrição de imagem



Exemplo 3: redução de ruído por limiarização de coeficientes



Referências

- Gonzalez, R.C., Woods, R.E. Processamento Digital de Imagens, 3.ed, 2010, Capítulo 7.
- Mallat, S. A compact multiresolution representation: the Wavelet model. Proc. IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision, pp.2-7, 1987.
- Mallat, S. Multiresolution approximation and Wavelet orthonormal bases of L_2 . Trans. Americal Math. soc. v.315, pp 69–87, 1989.
- Polikar, R. The Wavelet Tutorial.
<http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>.