**USP – ICMC – SME0822 - Análise Multivariada**

**1ª lista de exercícios – 2º/2015**

1. O vetor aleatório $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)'$ tem média $\boldsymbol{\mu} = (4, 3, 2, 1)'$ e matriz de covariâncias
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ & 1 & 1 & 0 \\ & & 9 & -2 \\ & & & 4 \end{bmatrix}.$$
O vetor $\boldsymbol{Y}$ é dividido como $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}^{(1)\prime}, \boldsymbol{Y}^{(2)\prime})'$, sendo que $\boldsymbol{Y}^{(1)} = (Y_1, Y_2)'$. Sejam $\boldsymbol{a} = (1, 2)'$ e $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
Calcule (a) $\mathrm{E}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{Y}^{(1)})$, (b) $\mathrm{cov}(\boldsymbol{Y}^{(2)})$, (c) $\mathrm{cov}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^{(2)})$, (d) $\mathrm{cov}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{Y}^{(1)}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^{(2)})$ e (e) $\mathrm{var}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^{(1)})$.

2. Seja $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, sendo que $\boldsymbol{\mu} = (-3, 1, 4)'$ e
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ & 5 & 0 \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$
Qual(is) dos(as) seguintes vetores ou variáveis são independentes? (a) $Y_1$ e $Y_2$, (b) $Y_2$ e $Y_3$, (c) $(Y_1, Y_2)'$ e $Y_3$, (d) $(Y_1 + Y_2)/2$ e $Y_3$ e (e) $Y_2$ e $Y_2 - 5Y_1/2 - Y_3$. Ainda em relação à distribuição de $\boldsymbol{Y}$ acima, determine a distribuição de (f) $Y_1 \mid Y_3 = y_3$ e (g) $Y_1 \mid (Y_2, Y_3)' = (y_2, y_3)'$.

3. O vetor aleatório $(Y_1, Y_2)'$ tem função densidade de probabilidade
$$f(y_1, y_2) = 2, \quad 0 < y_1 < y_2 < 1.$$
(a) Apresente as funções densidade de probabilidade marginais de $Y_1$ e $Y_2$.
(b) $Y_1$ e $Y_2$ são variáveis aleatórias independentes?

4. Exercício 2.32, p. 108 em Johnson and Wichern (2007).

5. Exercício 2.41, p. 109 em Johnson and Wichern (2007).

6. Um vetor aleatório $(Y_1, Y_2)'$ tem esperança $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)'$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, $-1 \le \rho \le 1$.

(a) Determine a distância estatística $d = \{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\}^{1/2}$ entre $\boldsymbol{y} = (1,1)'$ e $\boldsymbol{\mu}$.

(b) Discuta o comportamento de $d$ como função de $\rho$.

(c) Represente graficamente $d$ como função de $\rho$.

7. Se $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, prove que

$$Z = \frac{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu})}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

8. Se $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & a \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

determine o valor de $a$ para que $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{Y}$ sejam independentes, com $\boldsymbol{b} = (1,1,1)'$ e $\boldsymbol{c} = (1,-1,-1)'$.

9. Se $\boldsymbol{Y} \sim \mathrm{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$-1 \leq \rho \leq 1$, prove que a distribuição condicional de $(Y_1, Y_2)'$ dada $Y_3 = y_3$ é normal com média $\big(\mu_1 + \rho^2(y_3 - \mu_3), \mu_2\big)'$ e matriz de covariâncias

$$\begin{bmatrix} 1-\rho^4 & \rho \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Exercício 3.13, p. 146 em Johnson and Wichern (2007).

11. Exercício 3.16, p. 147 em Johnson and Wichern (2007).

12. Exercício 4.2, p. 200 em Johnson and Wichern (2007).

13. Exercício 4.4, p. 201 em Johnson and Wichern (2007).

14. A função densidade do vetor $(Y_1, Y_2)'$ é dada por

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{55\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{1512}\,(36y_1^2 - 24y_1y_2 + 25y_2^2 - 120y_1 - 2y_2 + 121) \right\},$$

para $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)' \in \mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\mathrm{E}(Y_1)$, $\mathrm{E}(Y_2)$, $\mathrm{var}(Y_1)$, $\mathrm{var}(Y_2)$ e $\mathrm{cov}(Y_1, Y_2)$.

(b) Apresente algumas curvas de nível de $f(y_1, y_2)$.

15. A função densidade do vetor $(Y_1, Y_2)'$ é dada por

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left( -\frac{y_1^2 + y_2^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi e} y_1^3 \, y_2^3 \, I_{[-1,1]}(y_1) \, I_{[-1,1]}(y_2),$$

sendo que $I_A(y)$ denota a função indicador do conjunto $A$, igual a 1, se $y \in A$, e igual a 0, se $y \notin A$.

(a) Prove que a distribuição de $(Y_1, Y_2)'$ não é normal bivariada.

(b) Prove que a distribuição marginal de $Y_j$ é normal, para $j = 1, 2$.

16. Exercício 4.39(a) e (b), p. 207 em Johnson and Wichern (2007).

# Referência

Johnson, R. A. and Wichern, D. W. *Applied Multivariate Statisitical Analysis*, sixth ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 2007.