11^a Lista de Exercícios de SMA332 - Cálculo II

Professor: Thais Jordão e Wagner Vieira Leite Nunes 17.02.2014

Exercício 1 *Calcule o valor da intergral curvelínea* $\displaystyle\int_C \vec{F} \bullet \vec{T}\, ds$ *nos seguintes casos:*

a) $\vec{F}(x, y) \doteq xy \cdot \vec{e}_1 - y \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e* C *é o segmento de reta que une os pontos* $(0, 0, 0)$ *e* $(1, 1, 1)$;

b) $\vec{F}(x, y, z) \doteq x \cdot \vec{e}_1 - y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e* C *é o traço da curva que tem como parametrização:* $(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = \left(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \dfrac{\theta}{\pi}\right)$, *para* $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercício 2

a) *Demonstrar que a integral de linha* $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)\, dx + (6x^2y - 3xy^2)\, dy$ *é independente do caminho que une o ponto* $(1, 2)$ *ao pnto* $(3, 4)$.

b) *Calcule o valor a integral de linha do item* **a)** *utilizando um caminho a sua escolha que una os dois pontos em questão.*

Exercício 3

a) *Provar que o campo vetorial* $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por* $\vec{F}(x, y, z) \doteq (2xz^3 + 6y)\vec{\imath} + (6x - 2yz)\vec{\jmath} + (3x^2z^2 - y^2)\vec{k}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *é um campo conservativo, isto é, o campo vetorial* $\vec{F}$ *deriva de um potencial.*

b) *Calcular o valor a integral de linha* $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{r}$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é um caminho que liga os pontos* $(1, -1, 1)$ *e* $(2, 1, -1)$.

Exercício 4 *Mostre que a integral de linha* $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{r}$ *independe do caminho* γ, *determinando uma função potencial* $\underline{f}$ *que deriva do campo* $\vec{F}$, *nos seguintes casos:*

a) $\vec{F}(x, y) \doteq (3x^2y + 2) \cdot \vec{e}_1 + (x^3 + 4y^3) \cdot \vec{e}_2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $\vec{F}(x, y) \doteq (2x \operatorname{sen}(y) + 4e^x) \cdot \vec{e}_1 + [x^2 \cos(y) + 2] \cdot \vec{e}_2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $\vec{F}(x, y) = [2y^3 \operatorname{sen}(x)] \cdot \vec{e}_1 + (6y^2 \cos(x) + 5) \cdot \vec{e}_2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 5 *Comprovar o Teorema de Green nos seguintes casos:*

a) $\displaystyle\oint_\gamma (2xy - x^2)\, dx + (x + y^2)\, dy$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é a curva fechada contida na região limitada, delimitada pelas representaçãoes geométricas dos gráficos das funções* $y = x^2$, *para* $x \in \mathbb{R}$ *e* $y^2 = x$, *para* $y \in \mathbb{R}$.

b) $\vec{F}(x, y) \doteq xy \cdot \vec{e}_1 - 2xy \cdot \vec{e}_2$, *para* $(x, y) \in D$, *onde a região* D *o retângulo* $[1, 2] \times [0, 3]$.

c) $\vec{F}(x, y) \doteq e^x \operatorname{sen}(y) \cdot \vec{e}_1 + e^x \cos(y) \cdot \vec{e}_2$, $(x, y) \in D$, *onde* D *é o retângulo* $[0, 1] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

d) $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{2}{3}xy^3 - x^2y\right) \cdot \vec{e}_1 + x^2y^2 \cdot \vec{e}_2$, $(x, y) \in D$, *onde* D *o triângulo de vértices nos pontos* $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

Exercício 6 *Usando o Teorema de Green, calcular o valor das integrais de linha:*

a) $\displaystyle\oint_\gamma e^x \operatorname{sen}(y)\, dx + e^x \cos(y)\, dy$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é o retângulo de vértices nos pontos* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *e* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) $\displaystyle\oint_\gamma 2x^2y^3\, dx + 3xy\, dy$, *onde o traço da curva parametrizada* γ *é a circunferência* $x^2 + y^2 = 1$.

Exercício 7 *Usando integrais de linha, calcule a área da região plana limitada, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das funções* $y = x + 2$, $y = x^2$.

Exercício 8 *Usando integrais de linha, calcule a área da região plana limitada, que está contida no primeiro quadrante e é delimitada pelos traços das curvas* $4y = x$, $y = 4x$ *e* $xy = 4$.

Exercício 9 *Calcule a integral de linha* $\displaystyle\oint_C \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2}$, *ondea curva* C *é o arco da parábola* $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 2$, *percorrido no sentidodo ponto* $(2, 3)$ *para o ponto* $(-1, 0)$. *Sugestão: aplicar o Teorema de Green.*