

# SCC-210

# Algoritmos Avançados

## Capítulo 6

## Análise Combinatória

Adaptado por João Luís G. Rosa

# Organização

- ◆ Introdução
- ◆ Técnicas de Contagem Elementares
- ◆ Relações de Recorrência
- ◆ Coeficientes Binomiais
- ◆ Seqüências
- ◆ Indução Matemática
- ◆ Algumas Fórmulas Úteis

# Introdução

- ◆ **Análise combinatória** pode ser definida como um ramo da matemática dedicado à contagem de elementos ou eventos discretos e de suas possíveis combinações.
- ◆ Exemplo:
  - Quantas senhas são possíveis com 8 caracteres utilizando letras maiúsculas, minúsculas e dígitos?
- ◆ Para problemas de contagem como este acima, dentre tantos outros, existem **soluções fechadas**:
  - Fórmulas matemáticas resultantes da análise combinatória.

# Introdução

## ◆ Importância da Análise Co

### ▪ Para Computação em Geral:

- ◆ Várias classes de problemas de contagem ocorrem recorrentemente em ciência da computação e programação.
- ◆ Pode substituir um algoritmo com tempo de execução elevado e/ou codificação complexa (p. ex. *backtracking!!!*) por uma única chamada a uma simples fórmula.

### ▪ Para Competições de Programação:

- ◆ Envolve problemas que são ideais para competições, pois ao mesmo tempo que são aparentemente complexos, admitem soluções simples, desde que vistos da forma correta.
- ◆ Permitem em alguns casos a obtenção de *look-up tables* para soluções *off-line* de forma muito mais rápida que via força bruta.

**Nota** (Skiena & Revilla, 2003; p. 129):

*The judge can't look into your heart or your program to see your intentions: it only checks the results.*

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Contagem de Associações:

- Uma associação é um arranjo de  $n$  itens, onde cada item pode ser escolhido de uma lista de  $m$  valores, com repetição.
- Por exemplo, quantas formas diferentes existem de se pintar 4 casas utilizando 3 cores?
- Logo, o número de possíveis associações é:

$$S(n, m) = m^n$$

- Exemplo: Existem  $S(4, 3) = 3^4 = 81$  associações possíveis entre 4 casas e 3 cores.

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Contagem de Associações:

### ▪ Outros exemplos de associações são:

- ◆ **Subconjuntos:** um subconjunto é uma seleção de elementos a partir de  $n$  itens, onde cada elemento é selecionado uma única vez.
- ◆ Em outras palavras, trata-se de uma seleção **sem reposição**.
- ◆ A seleção ou não de cada um dos  $n$  elementos pode ser representada de forma binária: arranjo binário de  $n$  posições.
- ◆ Logo, o número de possíveis subconjuntos é  $S(n,2)=2^n$ .
- ◆ Exemplo: Os  $S(3,2) = 2^3 = 8$  subconjuntos dos nos. 1,2,3 são:  
 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$ .

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Contagem de Associações:

### ▪ Outros exemplos de associações são:

- ◆ **Strings:** uma string é uma seleção de  $n$  dentre  $m$  itens, onde cada item pode ser selecionado mais de uma vez.
- ◆ Em outras palavras, trata-se de uma **seleção com reposição**.
- ◆ A string pode ser representada como um vetor: vetor de  $n$  posições, cada uma podendo assumir  $m$  valores.
- ◆ Logo, o número de possíveis strings é  $S(n,m) = m^n$ .
- ◆ Note que o número de strings binárias de tamanho  $n$  é igual ao número de subconjuntos de  $n$  elementos. Exemplo:
  - $2^3 = 8$  subconjuntos de 3 elementos.
  - $2^3 = 8$  strings binárias de tamanho 3.

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Contagem de Associações:

### ▪ Outros exemplos de associações são:

- ◆ Um computador de 32 bits é capaz de endereçar quantos gigabytes de memória (considerando o barramento de endereços = tamanho da palavra)?

$$S(32,2) = 2^{32} = 4,294,967,296 = 4\text{GB}$$

- ◆ Quantas senhas diferentes é possível criar utilizando de 8 a 10 letras ou dígitos, considerando letras minúsculas e maiúsculas?

$$S(8,62) + S(9,62) + S(10,62) = 852,836,452,414,603,776$$

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Permutações:

- Uma permutação é um arranjo de  $n$  itens, onde cada item aparece exatamente uma única vez.
- O 1o elemento do arranjo pode assumir qualquer um dos  $n$  itens, o 2o pode assumir  $n-1$  itens (qualquer um dos  $n$  itens menos o assumido pelo primeiro elemento), etc.
- Logo, o número de possíveis permutações é:

$$P(n) = n! = \prod_{i=1}^n i = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

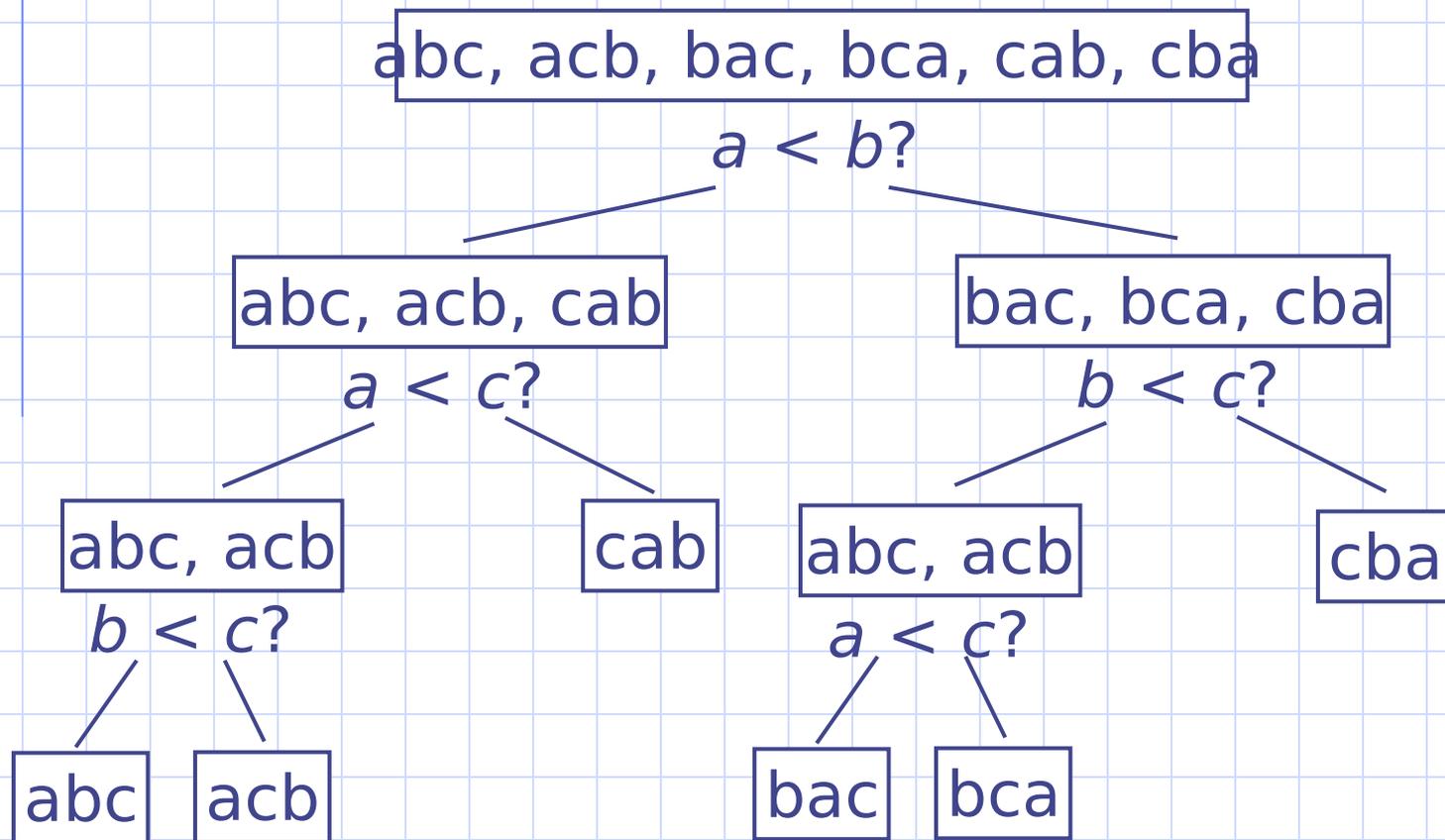
- Exemplo: As  $n! = 6$  permutações dos números 1,2,3 são:
  - ◆ 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

# Técnicas de Contagem Elementares

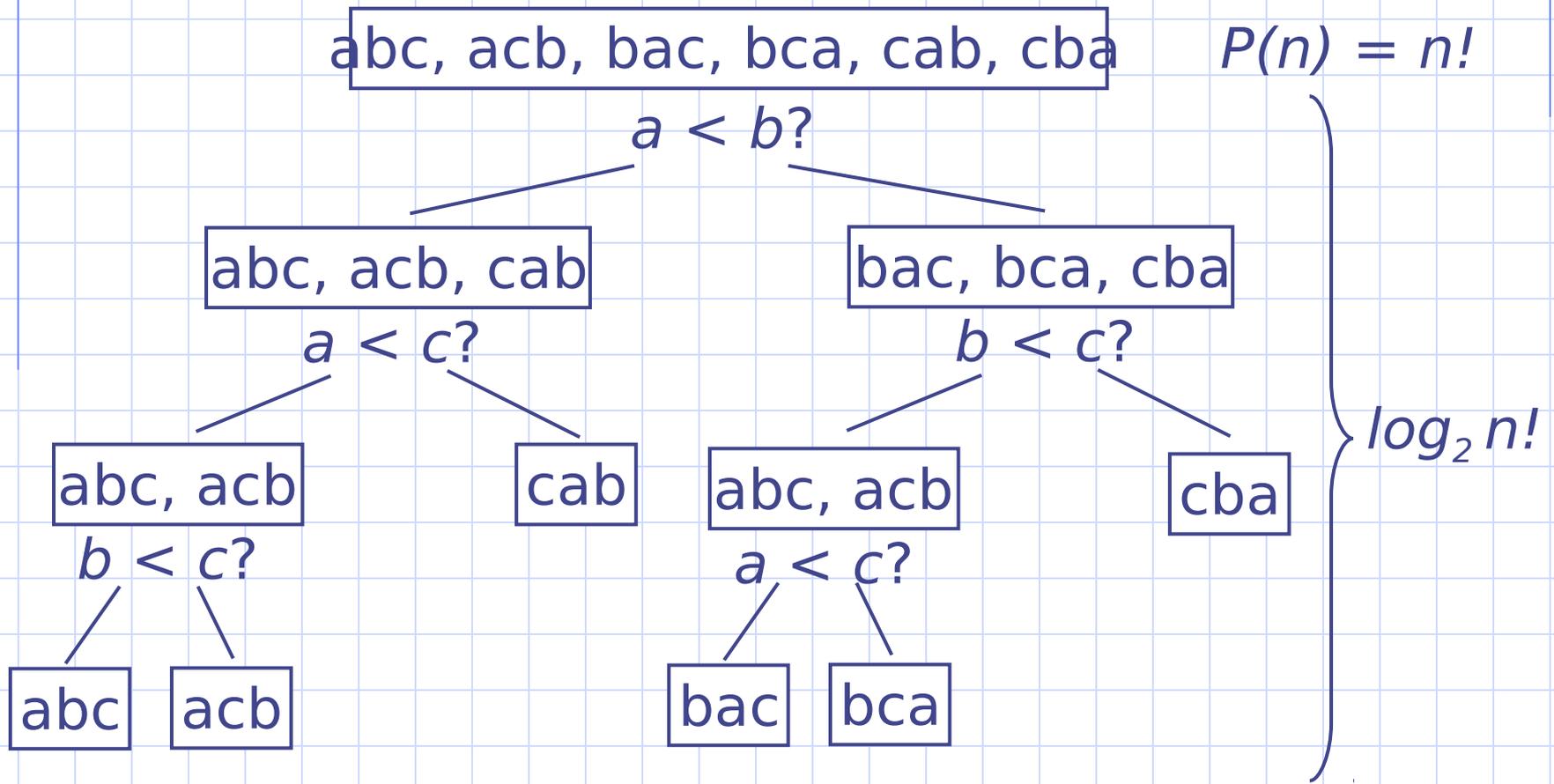
## ◆ Outros exemplos de permutações:

- Permutações são uma ferramenta na prova matemática que *algoritmos de ordenação de propósito geral* (ordenação baseada somente em comparações de chaves) podem levar no mínimo um tempo proporcional a  $n \log n$  para ordenar  $n$  elementos.
- Por exemplo, para um vetor de 3 elementos ( $n = 3$ ), existem 6 possíveis permutações ( $P(3)$ ), sendo que pelo menos uma delas é o vetor ordenado.
- Qual delas? Um algoritmo ótimo possui a seguinte estratégia...

# Técnicas de Contagem Elementares



# Técnicas de Contagem Elementares



É possível mostrar que  $O(\log_2 n!) = O(n \log_2 n)$

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Permutações II:

- Pode-se também estar interessado nas permutações de  $m$  dos  $n$  itens.
- Por exemplo, em um campeonato com 10 equipes, quantas variações são possíveis para as 3 primeiras colocações? Existem 10 possibilidades para o primeiro colocado, 9 para o segundo e 8 para o terceiro, portanto  $10 \times 9 \times 8 = 720$ .

$$P(n, m) = \frac{n!}{(n - m)!}$$

- Observe que  $P(n) = P(n, n)$ .

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Outros exemplos de permutações II:

- Quantas senhas de 8 letras é possível construir com 62 possíveis caracteres (letras maiúsculas e minúsculas e números), se nenhuma letra pode ocorrer mais de uma vez?

$$P(62,8) = \frac{62!}{(62-8)!} = 136,325,893,334,400$$

- Como calcular  $P(62,8)$  sem causar *overflow*? Note que:

$$P(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!} = \prod_{i=n-m+1}^n i = n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)$$

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Combinações:

- Pode-se estar interessado em selecionar  $m$  de  $n$  itens, mas não há interesse na ordem desses  $m$  itens.
- No exemplo do campeonato, pode-se querer saber os três primeiros colocados, sem ter interesse em saber a ordem dos três primeiros colocados.
- Sabe-se que existem  $P(10,3) = 720$ . Sabe-se também que  $P(3) = 6$ . Portanto o número de combinações é  $720/6 = 120$ .

$$\binom{n}{m} = \frac{P(n, m)}{P(m)} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Outros exemplos de combinações:

- Qual é o número de mãos de *poker* diferentes que podem ser obtidas? Uma mão de *poker* possui 5 cartas de um universo de 52 cartas.
- $P(52,5) = 52!/(52-5)! = 311,875,200$
- Entretanto, não há interesse na ordem em que as cartas são recebidas. Como  $P(5) = 5! = 120$ , então

$$\binom{52}{5} = \frac{P(52,5)}{P(5)} = \frac{311,875,200}{120} = 2,598,960$$

# Técnicas de Contagem Elementares

## ◆ Outros exemplos de combinações:

- Coeficientes da Expansão Binomial:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \dots \times (a+b)}_{n \text{ vezes}} = a^n + b^n + \sum_{m=1}^{n-1} c_m a^m b^{n-m}$$

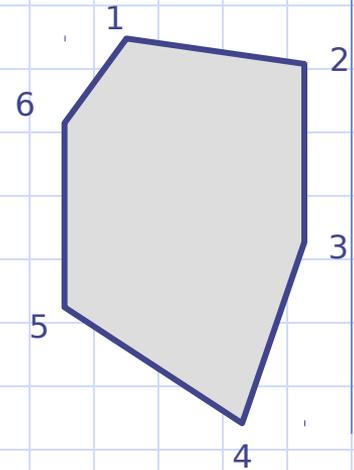
- ◆ Note que o coeficiente  $c_m$  corresponde ao número de possíveis diferentes combinações de  $m$  a's selecionados dentre os  $n$  disponíveis para compor o produto com os  $n - m$  b's dos binômios restantes.

- ◆ Exemplo:  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

$$c_m = \binom{n}{m}$$

- ◆ Logo, por definição, tem-se:

# Técnicas de Contagem Elementares



## ◆ Outros exemplos de combinações:

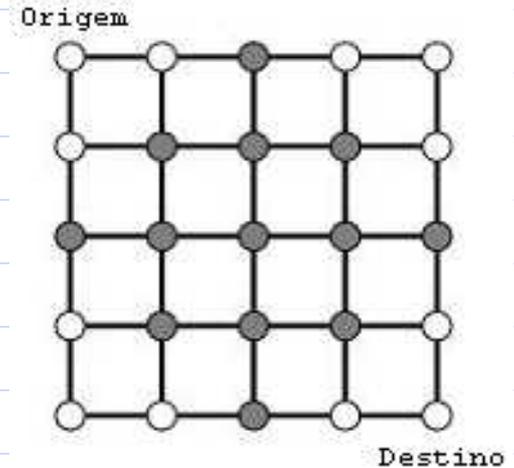
### ■ Triângulos em Polígonos Convexos:

- ◆ Qual o número  $N$  de triângulos internos e compartilhando vértices com um polígono convexo de  $n$  vértices?
- ◆ Resposta: como o polígono é convexo, qualquer trio de vértices formará um triângulo interno. Logo, tem-se:

$$N = \binom{n}{3}$$

- ◆ Nota: todas as permutações redundantes são contadas apenas uma vez na equação acima.

# Técnicas de Contagem Elementares



## ◆ Outros exemplos de combinações:

- Caminhos através de uma grade:
  - ◆ Quantas são as diferentes possíveis formas de caminhar em uma grade  $n \times m$  a partir do canto superior esquerdo e alcançar o canto inferior direito caminhando apenas para baixo e para a direita?
  - ◆ Note que cada caminho é necessariamente constituído de um conjunto de  $n + m$  passos,  $n$  para baixo e  $m$  para a direita.
  - ◆ Necessariamente, dois caminhos distintos diferem na ordem de um ou mais dos  $n$  passos para baixo, dentro dos  $n + m$  passos totais.
  - ◆ Exemplo (*grid* 2x2):
    - baixo - direita - baixo - direita (ordens 1 e 3)
    - baixo - baixo - direita - direita (ordens 1 e 2)
  - ◆ Logo, a resposta é:

$$\binom{n+m}{n}$$

# Coeficientes Binomiais

## ◆ Cálculo dos Coeficientes Binomiais:

- Pode-se calcular os coeficientes binomiais por meio da equação:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)}{m \times (m-1) \times \dots \times 1}$$

- No entanto, o uso desta equação para computar os coeficientes pode facilmente levar a *overflows* durante os cálculos intermediários das multiplicações.

# Coeficientes Binomiais

## ◆ Cálculo dos Coeficientes Binomiais:

- Pode-se calcular os coeficientes binomiais por meio da equação:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)}{m \times (m-1) \times \dots \times 1}$$

- No entanto, o uso desta equação pode facilitar os cálculos intermediários

```
long binominal_coefficient(n, m)
int n, m;
{
    long c;
    int i;
    c = 1;
    for (i = n; i > n-m; i--)
        c *= i;
    for (i = 2; i <= m; i++)
        c /= i;
    return c;
}
```

# Coeficientes Binomiais $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$

- ◆ Para calcular qualquer coeficiente usando essa recorrência, precisamos de **valores base** conhecidos. Para tanto toma-se:

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ maneira de escolher } 0 \text{ dentre } n \text{ itens} \rightarrow \emptyset$$

$$\binom{n}{n} = 1 \text{ maneira de escolher } n \text{ dentre } n \text{ itens} \rightarrow \mathbf{U}$$

- ◆ Exemplos:

$$\begin{aligned} \binom{2}{1} &= \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2; & \binom{3}{1} &= \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = 3 \\ \binom{3}{2} &= \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 3; & \binom{4}{1} &= \binom{3}{0} + \binom{3}{1} = 4 \end{aligned}$$

# Coeficientes Binomiais $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$

- ◆ A execução desse procedimento para  $k=0, \dots, n$  e  $n=0, \dots$  leva a uma matriz triangular conhecida como **Triângulo de Pascal**:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & & \vdots \end{array}$$

- ◆ Notas:

- A  $(n+1)$ -ésima linha representa os coeficientes  $\binom{n}{m}$  para  $0 \leq k \leq n$ .
- As fronteiras (elementos unitários) representam os valores base.
- Os elementos intermediários são sempre dados pela soma do elemento imediatamente acima e o seu predecessor à esquerda.
- A propriedade  $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$  fica clara observando a matriz.

# Triângulo de Pascal

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	<u>6</u>	<u>4</u>	1	
5	1	5	10	<u>10</u>	5	1

Cada número do triângulo de Pascal é igual à soma do número imediatamente acima e do antecessor do número de cima:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

$2^0$

$2^1$

$2^2$

$2^3$

$2^4$

$2^5$

$$6 + 4 = 10$$

A soma de uma linha no triângulo de Pascal é igual a  $2^n$

# Coeficientes Binomiais $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$

◆ Código para obtenção do triângulo de Pascal:

```
#define MAXN 100 /* largest n or m */

long binomial_coefficient(n,m)
int n,m;
{
    int i,j;
    long bc[MAXN][MAXN];

    for (i=0; i<=n; i++) bc[i][0] = 1;

    for (j=0; j<=n; j++) bc[j][j] = 1;

    for (i=1; i<=n; i++)
        for (j=1; j<i; j++)
            bc[i][j] = bc[i-1][j-1] + bc[i-1][j];

    return( bc[n][m] );
}
```

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
  :
```

# Relações de Recorrência

- ◆ Uma relação de **recorrência** é uma equação definida em termos de si mesma (recorrente).
- ◆ Trata-se de um conceito matemático intimamente ligado ao conceito de **recursão** em computação.
- ◆ Por exemplo, qualquer polinômio:

$$\blacksquare p_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

pode ser escrito **recorrentemente** (**regra de Horn**)

como

$$\blacksquare p_i(x) = c_{n-i} + x p_{i-1}(x) \ ; \ p_0(x) = c_n$$

e computado **recursivamente** em tempo  $O(n)$ .

# Relações de Recorrência

## ◆ Importância:

- Muitas recorrências podem ser expressas simplificadaamente através de funções:
  - ◆ Isso permite o cálculo analítico de qualquer termo de seqüências numéricas recorrentes, independente da quantidade de termos precedentes.
  - ◆ Exemplo (**Números de Fibonacci**):

- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad ; \quad F_0 = 0, F_1 = 1$

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

- $F_n = \text{sqrt}(5) * ( ((1 + \text{sqrt}(5))/2)^n - ((1 - \text{sqrt}(5))/2)^n )$

# Relações de Recorrência

## ◆ Importância (cont.):

- Muitas funções podem ser facilmente expressas como recorrências:
  - ◆ Exemplos:
    - $a_n = 2^n \rightarrow a_n = 2 \times a_{n-1}, a_0 = 1$
    - $a_n = n! \rightarrow a_n = n \times a_{n-1}, a_0 = 1$
- Isso permite simplificar o cálculo computacional de algumas dessas funções.
  - ◆ Exemplos:
    - Polinômios (regra de Horn)
    - **Coefficientes Binomiais**

# Seqüências

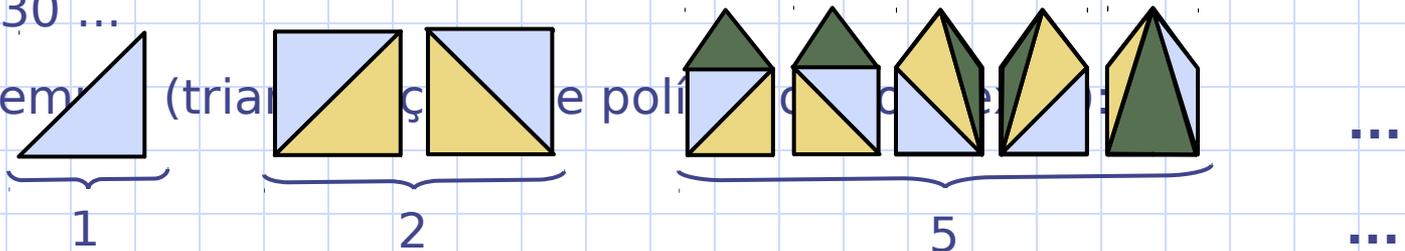
- ◆ Além da seqüência de Fibonacci vista anteriormente, existem outras seqüências numéricas de particular interesse por aparecerem em uma variedade grande de aplicações (e problemas de programação).

- ◆ **Números de Catalan:**

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- Para  $C_0 = 1$  tem-se  $C_n, n > 0$ , como: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430 ...

- Exemplos (triângulos, quadrados e polígonos):



# Seqüências

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## ◆ Números de Catalan (cont.):

- Quantas são as possíveis formas de construir uma fórmula balanceada com  $n$  pares de parênteses ?
  - ◆ Exemplo ( $n=3$ ):  $((()))$ ,  $()(())$ ,  $(())()$ ,  $((()())$ ,  $()()()$  → 5 formas
- Observe que o parêntesis mais à esquerda  $l$  deve fazer par com algum parêntesis direito  $r$ , o que divide os demais pares em dois grupos (possivelmente nulos):
  - ◆ aqueles entre  $l$  e  $r$ :  $((()))$ ,  $()(())$ ,  $(())()$ ,  $((()())$ ,  $()()()$
  - ◆ aqueles à direita de  $r$ :  $((()))$ ,  $()(())$ ,  $(())()$ ,  $((()())$ ,  $()()()$
- Se a parte interna contém  $k$  pares, a parte à direita deve necessariamente conter  $(n - 1) - k$  pares.
- Obviamente, ambas devem constituir fórmulas balanceadas.

# Seqüências

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## ◆ Números de Catalan (cont.):

- Definindo  $C_n$  como o no. de possíveis formas de construir uma fórmula balanceada com  $n$  pares de parênteses, tem-se que:
  - ◆ Existem  $C_k$  possíveis formas de construir a fórmula balanceada interna aos parênteses  $l$  e  $r$ .
  - ◆ Analogamente, existem  $C_{n-1-k}$  possíveis formas de construir a fórmula balanceada à direita de  $r$ .
  - ◆ Para cada forma interna existem  $C_{n-1-k}$  possíveis formas à direita.

◆ Logo:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

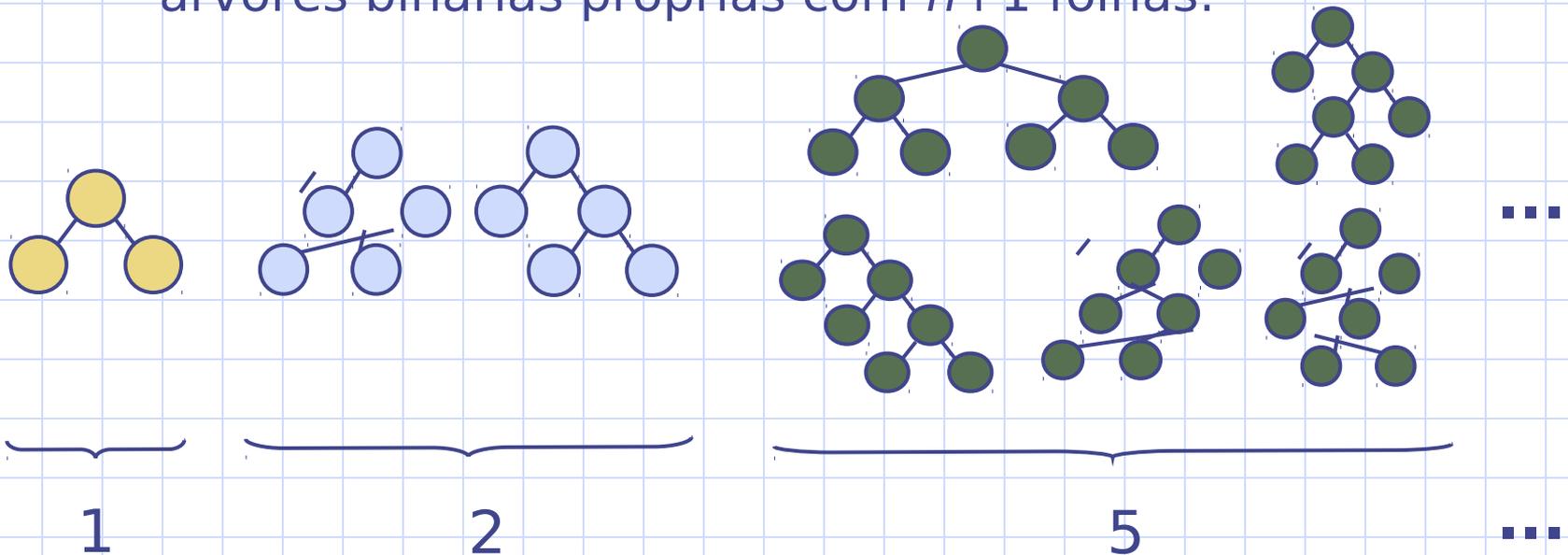
- ◆ Obs:  $C_0 = 1$  pois só existe uma forma de construir uma fórmula balanceada com 0 pares de parênteses, o nulo (conjunto vazio).

# Seqüências

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## ◆ Números de Catalan (cont.):

- Uma outra situação onde observa-se essa mesma série de números é na contagem do número de diferentes árvores binárias próprias com  $n+1$  folhas:



- Nota: Pode-se obter números iniciais por *backtracking*.

# Seqüências

$$\left\langle \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rangle$$

## ◆ Números de Euler :

- Os números de Euler (ou Eulerianos) contam qual o número de *permutações* de  $n$  itens com exatamente  $k$  *ascendentes*.
  - ◆ Uma permutação é um rearranjo de uma lista ordenada de itens
  - ◆ Um **ascendente** de uma permutação  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  é um par  $(a_i, a_{i+1})$  tal que  $a_i < a_{i+1}$  (de acordo com a ordem estabelecida)
- Exemplo:
  - ◆ As permutações de  $\{1,2,3\}$  são:  
 $\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}, \{3,2,1\}$
  - ◆ As permutações com exatamente 1 ascendente são:  
 $\{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\} \rightarrow$

$$\left\langle \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\rangle = 4$$

# Seqüências

## ◆ Números de Euler (cont.) :

	1								
	1	1							
	1	4	1						
	1	11	11	1					
	1	26	66	26	1				
	1	57	302	302	57	1			
	1	120	1191	2416	1191	120	1		
<b>n</b>									<b>k</b>

- Pode-se demonstrar que os números de Euler respeitam a seguinte relação de recorrência ( $n > 0$  e  $0 < k < n-1$ ):

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = k \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k+1) \left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$$



Observe a similaridade com os Coef. Binomiais e o Triângulo de Pascal

- Os valores base conhecidos são ( $k = 0$  e  $k = n - 1$ ):  $\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1$  (permutação descendente inversa)

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\rangle = 1 \text{ (permutação ascendente original)}$$

# Indução Matemática

◆ Dada uma seqüência ou relação de recorrência e valor(es) base conhecido(s), como obter uma expressão fechada para o  $n$ -ésimo termo?

◆ Por exemplo,  $T_n = 2T_{n-1} + 1; T_0 = 0$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$T_n$	0	1	3	7	15	31	63	127

◆ Uma das metodologias matemáticas para solucionar esse tipo de problema é **indução**.

◆ Essa metodologia requer uma **hipótese**, usualmente obtida a partir da observação de um conjunto de valores iniciais conhecidos e, possivelmente, ajustes por tentativa-e-erro. Exige Experiência !!!

◆ No exemplo acima, uma hipótese óbvia é  $T_n = 2^n - 1$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
T <sub>n</sub>	0	1	3	7	15	31	63	127

$T_n = 2T_{n-1} + 1, T_0 = 0$

# Indução Matemática

## ◆ Três Passos da Prova por Indução:

- Mostre que a hipótese satisfaz o valor base:  $T_0 = 2^0 - 1 = 0$
- Assuma que a hipótese é válida para qualquer  $n$ :  $T_n = 2^n - 1$
- Use esta hipótese para generalizar para os elementos seguintes:

$$T_{n+1} = 2T_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

## ◆ As razões da validade deste tipo de prova estão intimamente ligadas às razões do funcionamento de programas recursivos:

- Garante-se o funcionamento para caso(s) base (*boundary conditions*)
- Obtém-se o caso geral (*general conditions*) garantindo que este funciona como uma função do caso imediatamente anterior.

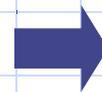
# Indução Matemática

## ◆ Exemplo:

- Seqüência:  $\sum_{k=0}^n k = ?$

- Caso base:  $\sum_{k=0}^0 k = 0$

- Hipótese:  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$



- Validade no Caso Base:  $\frac{0(0+1)}{2} = 0$

- Validade no Caso Geral:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

# Algumas Fórmulas Úteis

◆ **Série Aritmética:**  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

◆ **Soma de Quadrados:**  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

◆ **Soma de Cubos:**  $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

# Para Saber Mais...

- ◆ Graham, R., Knuth, D. & Patashnik, O., *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1989.
- ◆ Skiena, S. *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Addison-Wesley, 1990.
- ◆ A Enciclopédia On-line de Sequências de Inteiros:  
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html?language=portuguese>
- ◆ Cormen, T. H., Leiserson, C. E. & Rivest, R. L. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2nd. Ed., 2001.
- ◆ ...

# Self-describing Sequence

Popularidade: C, Sucess rate: high, Level: 2

Solomon Golomb's *self-describing sequence*  $\langle f(1), f(2), f(3), \dots \rangle$  is the only non-decreasing sequence of positive integers with the property that it contains exactly  $f(k)$  occurrences of  $k$  for each  $k$ . A few moment's thought reveals that the sequence must begin as follows:

<b><math>n</math></b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b><math>f(n)</math></b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>6</b>

In this problem you are expected to write a program that calculates the value of  **$f(n)$**  given the value of  **$n$** .

# Self-describing Sequence

## Input

The input may contain multiple test cases. Each test case occupies a separate line and contains an integer  $n$  ( $1 \leq n \leq 2,000,000,000$ ). The input terminates with a test case containing a value 0 for  $n$  and this case must not be processed.

## Output

For each test case in the input, output the value of  $f(n)$  on a separate line.

# *Self-describing Sequence*

## **Sample Input**

100

9999

123456

1000000000

0

## **Sample Output**

21

356

1684

438744

# *Self-describing Sequence*

- ◆ Possíveis soluções:
  - Encontrar uma equação para  $f(n)$ :

# Self-describing Sequence

## ◆ Possíveis soluções:

- Encontrar uma equação para  $f(n)$ :

$$f'(n) = \varphi^{(2-\varphi)} n^{(\varphi-1)} + E(n)$$

- Sendo:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$E(n) = O\left(\frac{n^{\varphi-1}}{\log n}\right)$$

Pétermann, Y.-F. S. *On Golomb's self describing sequence II*, Arch. Math., Vol. 67, 473-477 (1996).

# Self-describing Sequence

n: 1, f'(n): 1.20, E(n): -----  
n: 2, f'(n): 1.84, E(n): 2.21  
n: 3, f'(n): 2.37, E(n): 1.79  
n: 4, f'(n): 2.83, E(n): 1.70  
n: 5, f'(n): 3.25, E(n): 1.68  
n: 6, f'(n): 3.64, E(n): 1.69  
n: 7, f'(n): 4.00, E(n): 1.71  
n: 8, f'(n): 4.34, E(n): 1.74  
n: 9, f'(n): 4.67, E(n): 1.77  
n: 10, f'(n): 4.99, E(n): 1.80

n: 11, f'(n): 5.29, E(n): 1.84  
n: 12, f'(n): 5.58, E(n): 1.87  
n: 13, f'(n): 5.87, E(n): 1.90  
n: 14, f'(n): 6.14, E(n): 1.94  
n: 15, f'(n): 6.41, E(n): 1.97  
n: 16, f'(n): 6.67, E(n): 2.00  
n: 17, f'(n): 6.92, E(n): 2.03  
n: 18, f'(n): 7.17, E(n): 2.06  
n: 19, f'(n): 7.42, E(n): 2.10

**n: 1991, f'(n): 131.45, f(n) = 132, E(n) = 14.40**

# Self-describing Sequence

## ◆ Possíveis soluções:

- Encontrar uma equação para  $f(n)$ .
- Encontrar uma relação de recorrência.

# Self-describing Sequence

## ◆ Possíveis soluções:

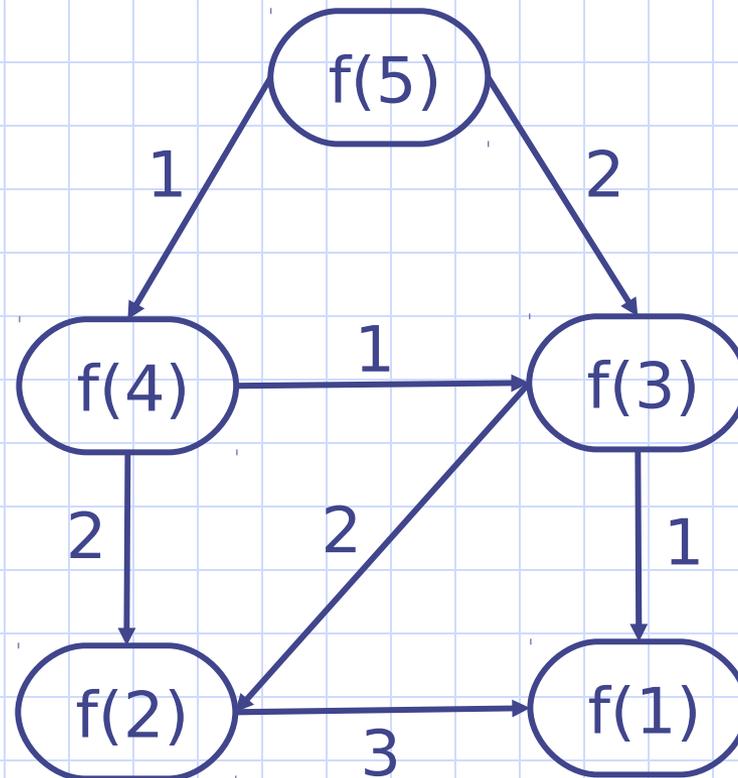
- Encontrar uma equação para  $f(n)$ .
- Encontrar uma relação de recorrência.
  - ◆  $f(1) = 1$ ;
  - ◆  $f(n) = 1 + f(n - f(f(n-1)))$ .

# Self-describing Sequence

## ◆ Possíveis soluções:

- Encontrar uma equação para  $f(n)$ .
- Encontrar uma relação de recorrência.
  - ◆  $f(1) = 1$ ;
  - ◆  $f(n) = 1 + f(n - f(f(n-1)))$ .
- Essa relação poderia ajudar a calcular  $f(n)$ , mas...
  - ◆ Seria muito custoso, ou;
  - ◆ Envolveria armazenar valores de  $f$  menores que  $n$ .

# Self-describing Sequence



# Self-describing Sequence

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

unsigned int sg(unsigned int n) {
    if (n == 1)
        return 1;
    else
        return 1+sg(n-sg(sg(n-1)));
}

main() {
    int n;

    for (n=1; n < 100; n++)
        printf("sg(%u) = %u\n", n, sg(n));
    system("pause");
}
```

# Self-describing Sequence

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

unsigned int v[100];

unsigned long long sg_memoization(int n) {
    if (v[n] != 0)
        return v[n];
    if (n == 1)
        v[n] = 1;
    else
        v[n] = 1+sg_memoization(n-sg_memoization(sg_memoization(n-1)));
    return v[n];
}

main() {
    int n;

    for (n=1; n < 100; n++) v[n] = 0;
    for (n=1; n < 100; n++)
        printf("sg(%u) = %u\n", n, sg_memoization(n));
    system("pause");
}
```

# Self-describing Sequence

- ◆ É possível armazenar os  $2 \times 10^9$  valores de  $f(n)$ ?

# Self-describing Sequence

◆ É possível armazenar os  $2 \times 10^9$  valores de  $f(n)$ ?

4 bytes por inteiro  $\times 2 \times 10^9 \approx 8$  GB.

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v1:$

1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	$f(n)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n$	
10										

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v1:$

1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	$f(n)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n$	

10

$v2:$

1	2	4	6	9	1	1	2	2	2
1	2	3	4	5	2	6	0	4	9

10

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v1:$

1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	$f(n)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n$	

10

$v2:$

1	2	4	6	9	1	1	2	2	2	$n$
1	2	3	4	5	2	6	0	4	9	$f(n)$

10

$$p/ i=1: v1[i] = v2[i] = 1;$$

$$p/ i > 1: v2[i] = v1[i-1]+v2[i-1]$$

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v1:$

1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	$f(n)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n$	

10

$v2:$

1	2	4	6	9	1	1	2	2	2	$n$
1	2	3	4	5	2	6	0	4	9	$f(n)$

10

$$n = 10, f(n) = ?$$

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v1:$

1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	$f(n)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	$n$	

10

$v2:$

1	2	4	6	9	1	1	2	2	2	$n$
1	2	3	4	5	2	6	0	4	9	$f(n)$

10

$$n = 10, f(n) = 5$$

# Self-describing Sequence

## Sample Input

100

9999

123456

1000000000

0

## Sample Output

21

356

1684

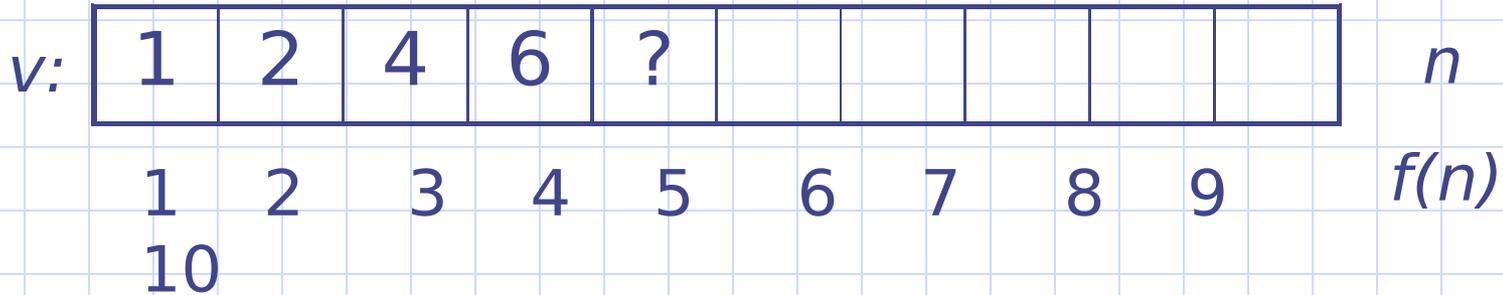
438744

# Self-describing Sequence

- ◆ A pergunta principal é:
  - É possível calcular todos os valores sem TLE (*time limit exception*)?
  - A resposta é sim, mas o algoritmo precisa ser  $O(n)$ .

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6



# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v:$

1	2	4	6	?											$n$
1	2	3	4	5	6	7	8	9							$f(n)$
10															

$$v[5] = f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + 1$$

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v:$

1	2	4	6	?								
1	2	3	4	5	6	7	8	9				
10												

$n$   
 $f(n)$

$$v[5] = f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + 1$$

$$v[5] = 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 9$$

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

v:

1	2	4	6	9	?							
1	2	3	4	5	6	7	8	9				
10												

$n$   
 $f(n)$

# Self-describing Sequence

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

$v$ :

1	2	4	6	9	?								
1	2	3	4	5	6	7	8	9					
10													

$n$   
 $f(n)$

$$v[6] = f(5) + v[5]$$

$$v[i] = f(i-1) + v[i-1]$$

# Self-describing Sequence

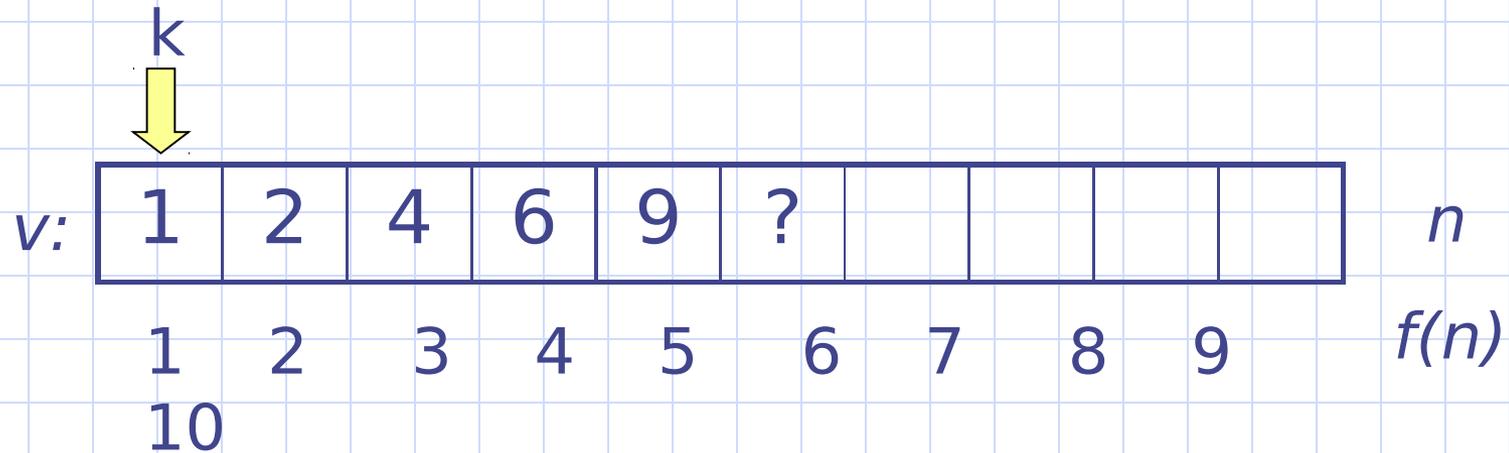
<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>f(n)</i>	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

<i>v:</i>	1	2	4	6	9	?								<i>n</i>
	1	2	3	4	5	6	7	8	9					<i>f(n)</i>
	10													

$$v[6] = f(5) + v[5] = 3 + 9 = 12$$

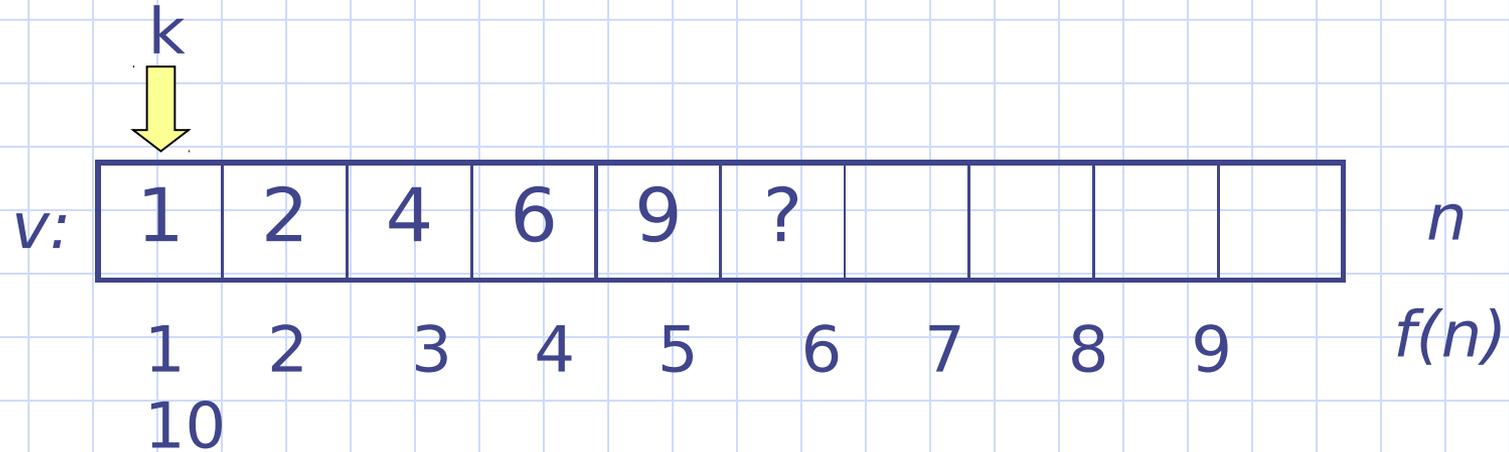
$$v[i] = f(i-1) + v[i-1]$$

# Self-describing Sequence



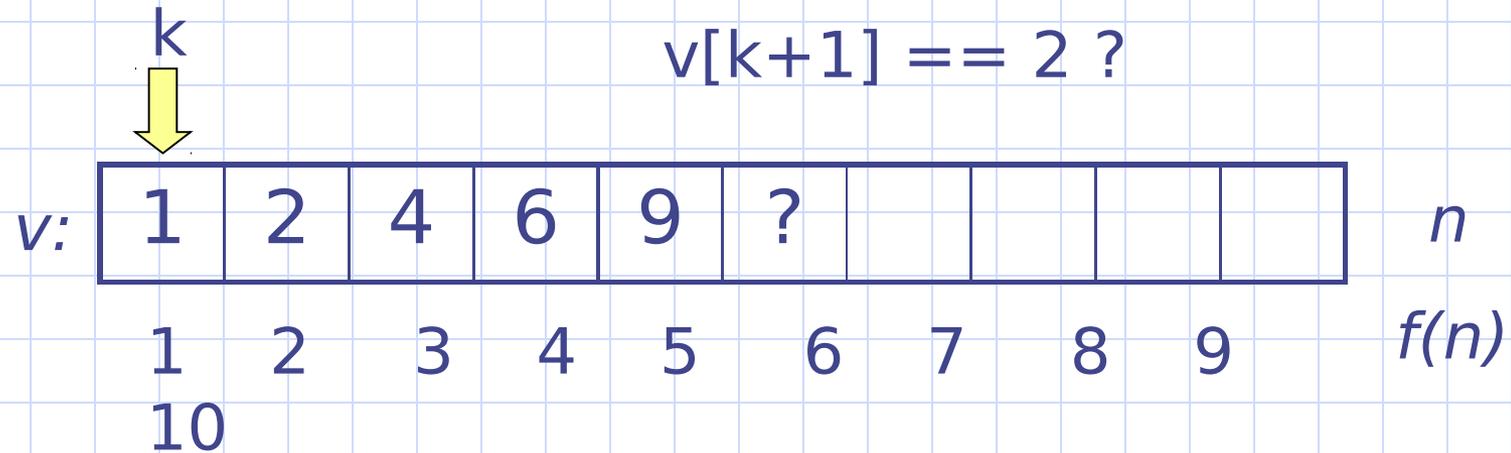
$$v[2] = f(1) + v[1]$$

# Self-describing Sequence



$$v[2] = f(1) + v[1] = k + v[1] = 2$$

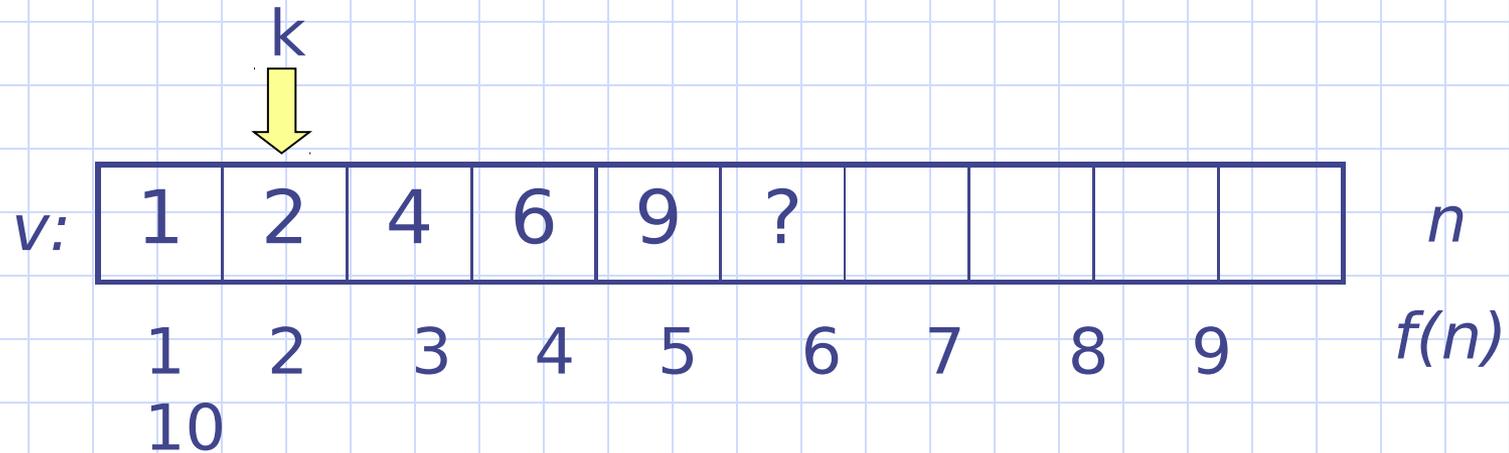
# Self-describing Sequence



$$v[2] = f(1) + v[1] = k + v[1] = 2$$

$$v[3] = f(2) + v[2]$$

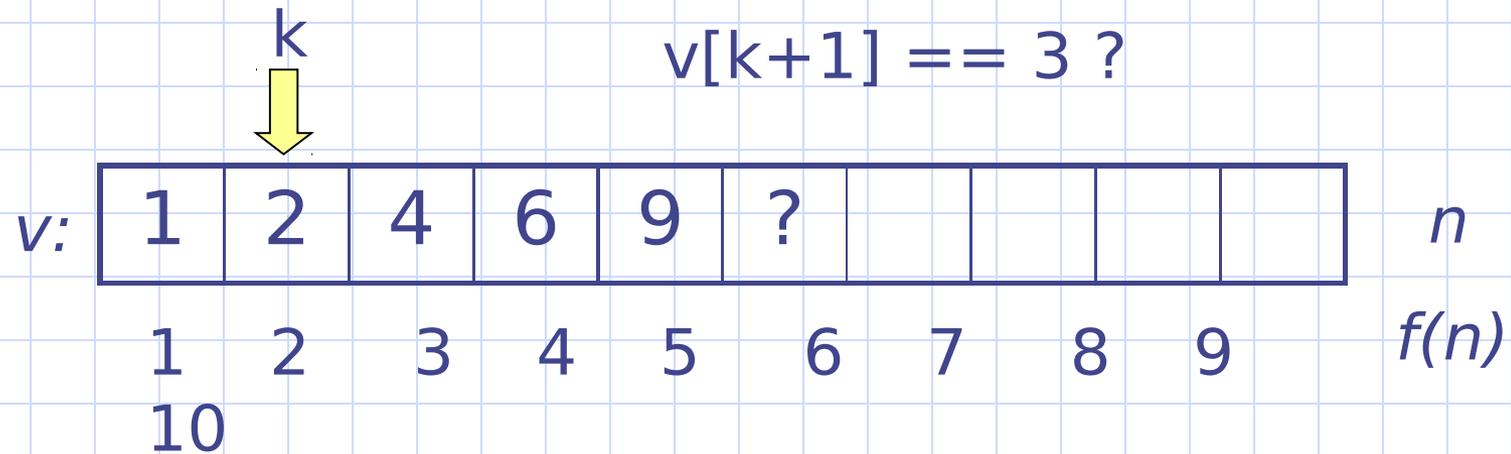
# Self-describing Sequence



$$v[2] = f(1) + v[1] = k + v[1] = 2$$

$$v[3] = f(2) + v[2] = k + v[2] = 4$$

# Self-describing Sequence

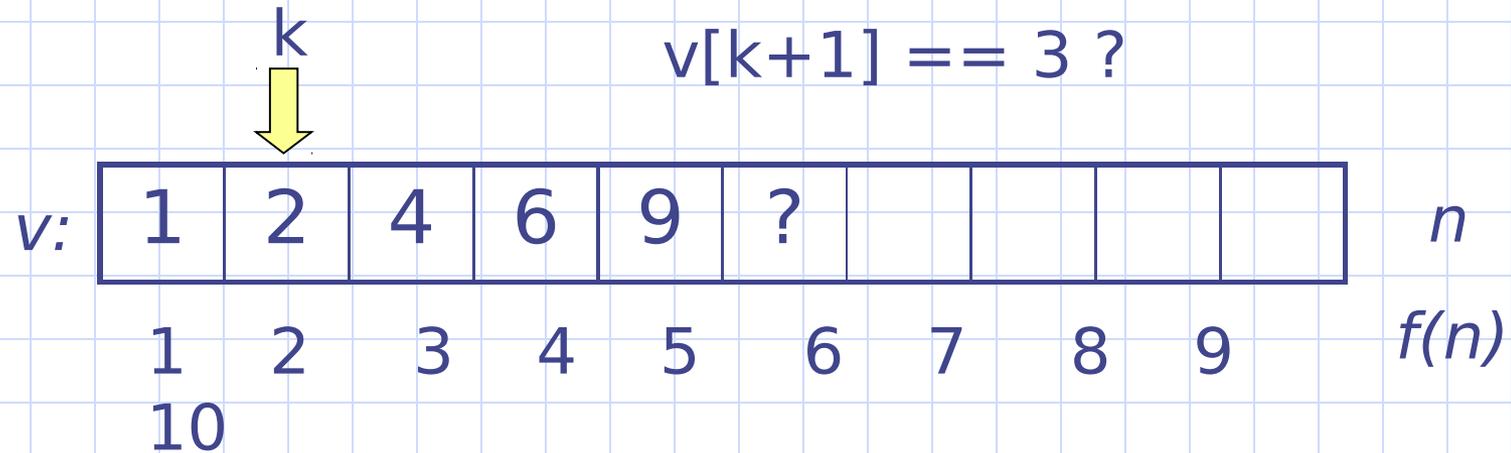


$$v[2] = f(1) + v[1] = k + v[1] = 2$$

$$v[3] = f(2) + v[2] = k + v[2] = 4$$

$$v[4] = f(3) + v[3]$$

# Self-describing Sequence



$$v[2] = f(1) + v[1] = k + v[1] = 2$$

$$v[3] = f(2) + v[2] = k + v[2] = 4$$

$$v[4] = f(3) + v[3] = k + v[3] = 6$$

# Para a próxima aula

◆ 11076 - *Add Again*

◆ 10844 - *Bloques*

# Add Again

Summation of sequence of integers is always a common problem in Computer Science. Rather than computing blindly, some intelligent techniques make the task simpler. Here you have to find the summation of a sequence of integers. The sequence is an interesting one and it is the all possible permutations of a given set of digits. For example, if the digits are  $\langle 1\ 2\ 3 \rangle$ , then six possible permutations are  $\langle 123 \rangle$ ,  $\langle 132 \rangle$ ,  $\langle 213 \rangle$ ,  $\langle 231 \rangle$ ,  $\langle 312 \rangle$ ,  $\langle 321 \rangle$  and the sum of them is 1332.

- **Input:** Each input set will start with a positive integer  $N$  ( $1 \leq N \leq 12$ ). The next line will contain  $N$  decimal digits. Input will be terminated by  $N=0$ . There will be at most 20000 test set.
- **Output:** For each test set, there should be a one line output containing the summation. The value will fit in 64-bit unsigned integer.

# Add Again

*Sample Input*

*Output for  
Sample Input*

3

1332

1 2 3

444

3

1 1 2

0

# Bloques

- ◆ Little Joan has  $N$  blocks, all of them of different sizes. He is playing to build cities in the beach. A city is just a collection of buildings.
- ◆ A single block over the sand can be considered as a building. Then he can construct higher buildings by putting a block above any other block. At most one block can be put immediately above any other block. However he can stack several blocks together to construct a building.

# Bloques

- ◆ However, it's not allowed to put bigger blocks on top of smaller ones, since the stack of blocks may fall. A block can be specified by a natural number that represents its size.
- ◆ It doesn't matter the order among buildings.  
That is:

1 3

2 4

- ◆ is the same configuration as:

3 1

4 2

# Bloques

- ◆ Your problem is to compute the number of possible different cities using  $N$  blocks. We say that  $\#(N)$  gives the number of different cities of size  $N$ . If  $N=2$ , for instance, there are only two possible cities:

**City #1:**

**1 2**

- ◆ In this city both blocks of size 1 and 2 are put over the sand.

**City #2:**

**1**

**2**

- ◆ In this city block of size 1 is over block of size 2, and block of size 2 is over the sand.

- ◆ So,  $\#(2)=2$ .

# Bloques

- ◆ **Input:** A sequence of non-negative integer numbers, each of one in different line. All of them but the last one are natural numbers. The last one is 0 and means the end. Each natural number is less than 900.
- ◆ **Output:** For each natural number  $l$  in the input, you must write a line with the pair of numbers  $l, \#(l)$ .

# Bloques

*Sample Input*

2

3

0

*Sample Output*

2, 2

3, 5

# Referências

- ◆ Batista, G. & Campello, R.
  - Slides disciplina *Algoritmos Avançados*, ICMC-USP, 2007.
- ◆ Skiena, S. S. & Revilla, M. A.
  - *Programming Challenges - The Programming Contest Training Manual*. Springer, 2003.
- ◆ Wikipedia
  - [http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo\\_de\\_Pascal](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal)
- ◆ *Add again e Bloque - UVa*
  - ◆ <http://uva.onlinejudge.org/external/108/10844.html>
  - ◆ <http://acm.uva.es/p/v110/11076.html>